

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

---

Випуск 78

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2006

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

*Ю.В. Верюжський*, д-р техн. наук  
*В.В. Гайдайчук*, д-р техн. наук  
*Є.О. Гоцуляк*, д-р техн. наук  
*О.І. Гуляр*, д-р техн. наук

*Є.С. Дехтярюк*, д-р техн. наук  
*Г.В. Ісаханов*, д-р техн. наук  
*П.П. Лізунов*, д-р техн. наук  
*М.О. Шульга*, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 20 грудня 2006 року, протокол № 13.

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 78 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2006. – 124 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,  
м. Київ, 03037,  
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

© КНУБА, 2006

УДК 539.3

**Баженов В.А.**, д-р техн. наук,  
**Гуляр О.І.**, д-р техн. наук,  
**Піскунов С.О.**, канд. техн. наук,  
**Андрієвський В.П.**

## **АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ПОШКОДЖЕНОСТІ**

Розроблено алгоритм з екстраполяцією переміщень для розв'язання просторових задач термов'язкопружності призматичних тіл з урахуванням пошкодженості матеріалу на основі напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) і проведено дослідження його достовірності і ефективності на тестових прикладах.

**Вступ.** В роботі [2] були отримані розв'язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) для обчислення матриці жорсткості та вектора вузлових реакцій косокутного призматичного скінченного елемента з урахуванням змінності компонент метричного тензора в площині його поперечного перерізу. Розв'язання просторових задач термов'язкопружності вимагає застосування ефективних алгоритмів розв'язання систем нелінійних рівнянь [4]. При цьому, при формуванні вектора вузлових реакцій необхідним є обчислення напружень не лише із врахуванням деформацій пластичності, повзучості та накопичення пошкодженості, а також із врахуванням величин температурних деформацій.

**Алгоритм розв'язання просторових задач термов'язкопружності-пластичності.** Розв'язання просторових задач термов'язкопружності-пластичності потребує застосування ефективних алгоритмів, які орієнтовані на моделювання тривалих за часом процесів деформування матеріалу, є інваріантними щодо використовуваних форм рівнянь повзучості та надають можливість урахування змін фізико-механічних властивостей матеріалу залежно від параметрів напружено-деформованого стану і температури.

Процес нелінійного деформування може бути поданий у вигляді сукупності дискретних кроків за параметрами зовнішнього навантаження і часом. Таким чином, для розв'язання задачі необхідним є використання покрокового алгоритму. В свою чергу, на кожному кроці для розв'язання систем нелінійних рівнянь МСЕ використовуються ітераційні алгоритми.

Вибір величини кроку за параметром ( $\Delta t$  за часом і  $\Delta p$  за навантаженням) здійснюється виходячи з необхідності дотримання умов

збіжності, як ітераційного процесу розв'язання систем нелінійних рівнянь, так і отримуваних результатів. При цьому значення  $\Delta t$  і  $\Delta r$  суттєво залежать від механічних характеристик матеріалу (параметрів кривих пружнопластичного деформування і повзучості) та характеру змінення зовнішнього навантаження. Правильний вибір кроку за часом і навантаженням суттєво впливає на точність отримуваних результатів, тому проведення відповідних досліджень збіжності є важливим етапом розв'язання задачі.

Для урахування змін фізико-механічних властивостей матеріалу залежно від температури і зовнішнього навантаження на початку кожного кроку розв'язання задачі передбачено можливість їх коригування. В межах кроку фізико-механічні характеристики передбачаються незмінними.

На кожній ітерації  $n$  кроку  $m$  вектор невідомих переміщень  $\{u\}_n^m$  системи нелінійних рівнянь МСЕ може бути поданий у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m), \quad (1)$$

де  $\{Q\}_n^m$  – вектор вузлових навантажень на кроці  $m$ ;  $\{R\}_n^m$  – вектор вузлових реакцій на ітерації  $n$ , обчислений за величинами напружень  $\sigma_{ij}$ , змінення яких відбуваються внаслідок прирощення зовнішнього навантаження або часу і відповідного нелінійного деформування матеріалу.

Формула (1) описує ітераційний алгоритм для розв'язання систем нелінійних рівнянь МСЕ. Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\left\| \{Q\}_n^m - \{R\}_n^m \right\| \leq \zeta \left\| \{Q\}_n^m \right\|, \quad (2)$$

де  $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$  – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності отримуваного розв'язку.

При використанні НМСЕ та відповідному поданні переміщень і зовнішніх навантажень у вигляді розкладання за системою базисних функцій  $\Psi^l$

$$u_{k'} = \sum_{l=0}^L U_{k'l} \Psi^l, \quad \{Q_l\}_n^m = \int_{-1}^1 Q_m \Psi^l \sqrt{g} \, dx^3, \quad (3)$$

вектори  $\{u\}_n^m$ ,  $\{Q\}_n^m$ ,  $\{R\}_n^m$  і матриця жорсткості  $[K]$  набувають блочної структури:

$$\{u\}_n^m = \begin{Bmatrix} \{u_1\}_n^m \\ \dots \\ \{u_l\}_n^m \\ \dots \\ \{u_L\}_n^m \end{Bmatrix}, \quad \{Q\}_n^m = \begin{Bmatrix} \{Q_1\}_n^m \\ \dots \\ \{Q_l\}_n^m \\ \dots \\ \{Q_L\}_n^m \end{Bmatrix}, \quad \{R\}_n^m = \begin{Bmatrix} \{R_1\}_n^m \\ \dots \\ \{R_l\}_n^m \\ \dots \\ \{R_L\}_n^m \end{Bmatrix}; \quad (4)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \dots & [K_{1l}] & \dots & [K_{1L}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{l1}] & \dots & [K_{ll}] & \dots & [K_{lL}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{L1}] & \dots & [K_{Ll}] & \dots & [K_{LL}] \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Зважаючи на зазначену особливість матриці жорсткості, для розв'язання отриманої системи рівнянь раціональним є використання блочно-ітераційних алгоритмів [1].

На кожній ітерації  $n$  розв'язання нелінійної задачі за алгоритмом (1) проводиться внутрішній ітераційний процес розв'язання лінійної задачі. Зважаючи на це, а також враховуючи вирази (3) – (5), для розв'язання лінійної задачі застосовується алгоритм:

$$\{U_l\}_{n\ k}^m = \{U_l\}_{n\ k-1}^m + \beta [K_{ll}]^{-1} \left( \{P_l\}_n^m - \{S_l\}_{n\ k-1}^m \right), \quad (6)$$

де  $\beta$  – параметр релаксації,  $1 < \beta < 2$ ;  $\{P_l\}_n^m = (\{Q_l\}_n^m - \{R_l\}_n^m)$  – вектор навантаження на ітерації  $n$  кроку  $m$ , отриманий за величинами дійсних значень напружень, обчислених з урахуванням наявності нелінійних

деформацій;  $\{S_l\}_{n\ k}^m = \sum_{l=0}^{l^*-1} [K_{ln}] \{u_l\}_{n\ k+1}^m + \sum_{l=l^*}^L [K_{ln}] \{u_l\}_{n\ k}^m$  – вектор непогодженості, який, внаслідок недіагональної структури матриці  $[K_{ln}]$ , враховує неточність отриманого на ітерації  $k$  розв'язку системи лінійних рівнянь.

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L \left( \{ \Delta u \}_l^n \right)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L \left( \{ u \}_l^n \right)^2 . \quad (7)$$

Таким чином, запропонований алгоритм передбачає реалізацію двох ітераційних циклів: внутрішнього, пов'язаного з розв'язанням системи лінійних рівнянь на кожній ітерації нелінійного циклу, та зовнішнього, обумовленого розв'язанням саме системи нелінійних рівнянь. Загальна кількість ітерацій дорівнюватиме добутку кількості ітерацій цих двох циклів, що суттєво перевищує кількість ітерацій, необхідних для розв'язання нелінійної задачі за МСЕ.

Зменшити загальну кількість ітерацій дозволяє підхід, що ґрунтується на суміщенні внутрішнього ітераційного процесу розв'язання лінійної задачі й ітераційного процесу розв'язання нелінійної задачі. Тоді алгоритм (6) набуває вигляду [4]

$$\{ u_l \}_{n+1}^m = \{ u_l \}_n^m + \beta [K_{ll}]^{-1} \left( \{ Q_l \}_n^m - \{ R_l \}_n^m \right). \quad (8)$$

Матриця жорсткості  $[K_{ll}]$  обчислюється за формулами наведеними в роботі [2], а при обчисленні вектора вузлових реакцій  $[R_l]$ , крім пружних деформацій, враховуються температурні деформації, деформації пластичності та повзучості.

Формула (8) описує метод блочних ітерацій із послідовною верхньою релаксацією для розв'язання систем нелінійних рівнянь, використання якого обмежено простим навантаженням в межах кроку  $m$ . Як свідчать наведені в роботі [1] результати розв'язання тестових прикладів, зазначений алгоритм дозволяє суттєво зменшити кількість ітерацій розв'язання нелінійної задачі на основі НМСЕ.

При реалізації даного алгоритму традиційно в якості першого наближення розв'язку на першій ітерації кроку  $m$  використовують розв'язок, що відповідає не звантаженому стану тіла ( $\{ u_l \}_1^m = 0$ ,  $\{ R_l \}_1^m = 0$ ). Але, при покроковому розв'язанні задачі, зважаючи на необхідність виконання умов збіжності за кроками по навантаженню, відмінності розподілення параметрів напружено-деформованого стану при відносно невеликому співвідношенні прирощення навантаження до його абсолютних значень є несуттєвими. Тому для підвищення ефективності запропонованого алгоритму та, відповідно, зменшення обсягу обчислювальних витрат, було реалізовано підхід, що базується на застосуванні екстраполяції переміщень  $\{ \bar{u}_l \}_1^m$  за їх величинами,

отриманими на попередньому кроці  $\{u_l\}^{m-1}$  та відношенням величин навантаження даного  $\{Q_l\}^m$  та попереднього  $\{Q_l\}^{m-1}$  кроків:

$$\{\bar{u}_l\}_1^m = \{u_l\}^{m-1} \frac{\{Q_l\}^m}{\{Q_l\}^{m-1}}. \quad (9)$$

За величиною отриманих переміщень обчислюються вузлові реакції  $\{R_l\}_1^m$ , які в подальшому використовуються в ітераційному процесі.

**Визначення напружень при температурному навантаженні.** В загальному випадку на кожному кроці розв'язання задачі на першому етапі проводиться визначення напружено-деформованого стану при термопружному деформуванні.

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій [2] визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (10)$$

де  $\alpha_T = \alpha_T(z^{k'}, T)$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу,  $\Delta T = T - T_0$  – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при  $T = T_0$ ,  $g_{ij}$  – компоненти метричного тензора.

При розв'язанні просторових задач застосовують базисну декартову та місцеву системи координат. Зв'язок між місцевою та базисною системами координат здійснюється на основі компонентів тензора перетворення  $z_{,j}^{i'}$ .

При дослідженні призматичних тіл для базисної декартової системи координат компоненти метричного тензора мають наступні значення:

$$g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma} z_{,\beta}^{\gamma}, \quad g_{33} = (z_{,3}^3)^2. \quad (11)$$

Будемо вважати, що визначник матриці, що складена з компонент метричного тензору  $g_{ij}$ , а також коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha_T$  дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$g = \overset{\circ}{g} = g|_{x^{\alpha}=0}; \quad \alpha_T = \overset{\circ}{\alpha}_T = \alpha_T|_{x^{\alpha}=0}. \quad (12)$$

Розподілення температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (13)$$

де  $T_{(S_1 S_2)}$  – вузлові значення температури, що подані компонентами в базисній системі координат;  $S_1$  і  $S_2$  – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат  $x^i$ .

Визначимо похідні від температури в центрі поперечного перетину СЕ виходячи з прийнятого закону їх розподілення (13):

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)}; \quad \overset{\circ}{T}_{,\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} S_{\alpha}. \quad (14)$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє найбільш просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь [1].

Фізичні компоненти тензора температурних деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\xi_{ij}^T = \frac{\varepsilon_{ij}^T}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}. \quad (15)$$

У відповідності до моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [6] компоненти тензору температурних деформацій в поперечному перетині, що відповідає точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\xi}_{\alpha(\alpha)}^T + \overset{\circ}{\xi}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^T x^{(3-\alpha)}; \\ \xi_{12}^T &= \overset{\circ}{\xi}_{12}^T; \\ \xi_{\alpha 3}^T &= 0; \\ \xi_{33}^T &= \overset{\circ}{\xi}_{33}^T + \overset{\circ}{\xi}_{33, \beta}^T x^{\beta}. \end{aligned} \quad (16)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій в ряд Маклорена з урахуванням подання

фізичних компонент температурних деформацій в місцевій системі координат з врахуванням (16) та з підстановкою (10):

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial(\overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T)}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T_{,(3-\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{1}{g_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T}{\partial x^\beta} = \frac{\partial(\overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T)}{\partial x^\beta} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T_{,\beta};\end{aligned}\tag{17}$$

де  $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T \Big|_{x^\alpha=0}$ ,  $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta}^T = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}$ .

Коефіцієнтом розкладення  $\frac{\partial^2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\alpha=0}$  нехтуємо, як величиною більш високого порядку малості.

Згідно формули (15) та підставляючи (17) знаходимо:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} g_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T g_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T_{,(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \sqrt{g_{11} g_{22}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T g_{12}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} g_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T g_{33}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} g_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T_{,\beta} g_{33};\end{aligned}\tag{18}$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій через вузлові температури (14):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} 2S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{12}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \beta}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33} 2S_{\beta}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} = \left[ \overset{\circ}{B}^T \right] \{ T \}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{, \alpha}^T \right\} = \left[ \overset{\circ}{B}_{, \alpha}^T \right] \{ T \}, \tag{20}$$

де  $\{ T \}^T = \{ T_{(-1;-1)} \ T_{(1;-1)} \ T_{(-1;1)} \ T_{(1;1)} \}$ ;

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{, \alpha}^T \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha), \alpha}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha}^T \right\}.$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}^T \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;1)} \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;1)} \right]; \tag{21}$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_{, \alpha}^T \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_{, \alpha}^T \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{, \alpha}^T \right]^{(1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{, \alpha}^T \right]^{(-1;1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{, \alpha}^T \right]^{(1;1)} \right].$$

Значення компонент підматриць  $\left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(S_1, S_2)}$ ,  $\left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(S_1, S_2)}$  у виразі (21)

для неоднорідних призматичних тіл визначаються відповідно до формул (19) з урахуванням обчислених за (11) значеннями компонент метричного тензора для призматичних тіл:

$$\left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{11} \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{12} \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}; \quad (22)$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{\alpha} \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти розкладання прирощень напружень визначаються за величинами повних і температурних деформацій:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left( \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} - \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} \right), \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D}_{\alpha} \right] \left( \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} - \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\} \right), \quad (23)$$

де  $\left[ \overset{\circ}{D} \right] = \left[ \overset{\circ}{C}^{ijkl} \right]$ ,  $\left[ \overset{\circ}{D}_{\alpha} \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[ \overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)3} \right] \left[ \overset{\circ}{C}^{ij33} \right] \right]$ ,  $C^{ijkl}$  –

компоненти тензора пружних сталей для ізотропного тіла;  $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}$ ,  $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}$  –

компоненти величин повних деформацій в векторній формі [2].

**Обчислення напружень при наявності деформацій пластичності та повзучості.** На кожній ітерації  $n$  кроку  $t$  розв'язання системи нелінійних рівнянь здійснюється із використанням алгоритму (8) [1]. Отримані напруження перевіряються за умовою наявності пластичного деформування  $\tau > \tau_s$ , де  $\tau_s$  – поточне значення межі текучості. При

виконанні цієї умови у відповідних точках конструкції проводиться визначення напружено-деформованого стану, яке пов'язано із прирошенням миттєвих деформацій пластичності. Після цього з урахуванням прирошення часу на кроці проводиться визначення напружено-деформованого стану з урахуванням перебігу процесу повзучості.

На початку кожної ітерації  $n$  кроку  $m$  компоненти тензора напружень  $\sigma_{ij}$  обчислюються за формулою:

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta\sigma_{ij})_n, \quad (24)$$

де  $(\Delta\sigma_{ij})_n$  – прирошення напружень, які визначаються згідно з законом Гука за величиною прирошення повних деформацій.

Дійсні значення напружень  $(\overline{\sigma}_{ij})_n^m$ , що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій  $\{R\}_n^m$ , обчислюються за формулою:

$$(\overline{\sigma}_{ij})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\sigma_{ij})_n^m + (\overline{s}^{ij})_n^m = (\sigma_o)_n^m + (\overline{s}^{ij})_n^m, \quad (25)$$

де  $(\overline{s}^{ij})_n^m$  – компоненти девіатора напружень, що враховують прирошення нелінійних деформацій пластичності або повзучості.

Визначення компонент девіатора  $(\overline{s}^{ij})_n^m$  дійсних напружень, що входять до формули (25), при наявності деформацій пластичності, здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості  $\tau_s$  [8]:

$$(\overline{s}^{ij})_n^m = (s^{ij})_n^m \frac{\tau_s}{\tau}, \quad (26)$$

де  $\tau = \sqrt{s_{ij}s^{ij}}/2$  – поточне значення інтенсивності дотичних напружень.

Напруження, отримані за формулами (24) – (26), використовуються для подальшого обчислення вектора вузлових реакцій і перевіряються за умовою (7), в разі виконання якої ітераційний процес визначення миттєвих деформацій пластичності припиняється. Далі проводиться обчислення дійсних значень прирошень деформацій пластичності  $(\Delta\varepsilon_{ij}^p)_m$ :

$$\left(\varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_{m-1} + \left(\Delta\varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_{m-1} + \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right) \left(\overline{s_{ij}}\right)_m / G_1. \quad (27)$$

При наявності деформацій повзучості на початку кожної ітерації  $n$  кроку  $m$  компоненти тензора напружень  $\sigma_{ij}$  також обчислюються за формулами (24), (25):

$$\left(\overline{s_{ij}}\right)_n^m = \left(s_{ij}\right)_n^m - G_1 \left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_n^m, \quad \left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_n^m = \left(\xi_{ij}^c\right)_n^m \Delta t_m, \quad (28)$$

де  $G_1 = E / (1 - 2\nu)$ ;  $\left(\xi_{ij}^c\right)_n^m = \frac{3}{2} \left[\xi_i^c\right]_m^n \frac{\left(s_{ij}\right)_n^m}{\left(\sigma_i\right)_m^n}$ ,  $\xi_i^c = \frac{d\varepsilon_i^c}{dt} = \xi_i^c(\sigma_i, \nu_c, T, \omega)$ ;  $\Delta t_m$  –

величина кроку за часом.

Аналогічно до випадку розгляду деформацій пластичності, отримані за формулами (24), (25), (28), напруження перевіряються за умовою (7), після виконання якої проводиться обчислення прирощень деформацій повзучості  $\left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_m$  і пошкоженості  $\left(\Delta\omega\right)_m$  із використанням напружень, отриманих на останній ітерації кроку, і відповідних накопичених величин  $\left(\varepsilon_{ij}^c\right)_m$  і  $\omega_m$ :

$$\left(\varepsilon_{ij}^c\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c\right)_{m-1} + \left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c\right)_{m-1} + \left(\xi_{ij}^c\right)_m \Delta t_m, \quad (29)$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + \left(\Delta\omega\right)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_m \Delta t_m$$

Формули (24), (25), (27)–(29) є інваріантними щодо конкретизованого вигляду виразів  $\xi_i^c$  і  $\frac{d\omega}{dt}$ .

У кінці кожного кроку для всіх точок тіла здійснюється перевірка умови локальної втрати несучої здатності матеріалу:

$$\omega > \omega^*, \quad (30)$$

де  $\omega^*$  – критичне значення параметра пошкоженості, що відповідає моменту руйнування матеріалу.

Теоретично  $\omega^* = 1$  [5], але при чисельному розв'язанні задач для  $\xi_i^c$  і  $\frac{d\omega}{dt}$  приймається  $\omega^* = 0,9 - 0,99$  [1].

Момент часу  $t^*$ , коли хоч в одному із СЕ задовільняється умова (30), фіксується як момент переходу від процесу накопичення пор і несущільностей у матеріалі, що враховуються інтегрально за допомогою параметра пошкодженості, до процесу зародження макроскопічних дефектів. Моделювання їхнього розвитку до утворення початкових тріщин може бути продовжено на основі співвідношень континуальної механіки руйнування.

**Ефективність і вірогідність розв'язання задач термов'язкопружнопластичності.** Для дослідження ефективності викладеного алгоритму і вірогідності отримуваних результатів при наявності деформацій пластичності розглянуто тестовий приклад про деформування нескінченної товстостінної труби (рис. 1) від впливом внутрішнього тиску, який змінюється від 0 до  $p_{\max} = 0.07 \text{ МН} / \text{м}^2$ , характеристики матеріалу:  $E = 1 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0.3$ . Розрахунок проведений до фрагмента труби, обмеженого двома перпендикулярними до її осі поперечними перерізами, дискретна модель якого побудована із використанням косокутних призматичних СЕ.

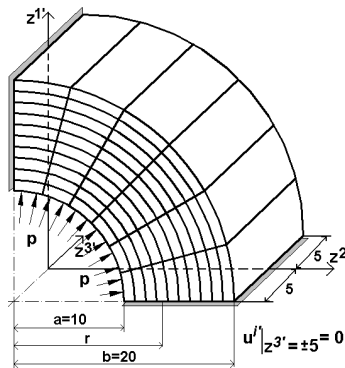


Рис.1. Дискретна модель НМСЕ для товстостінної труби

При поступовому збільшенні навантаження від 0 до  $p_{\max} = 0.07 \text{ МН} / \text{м}^2$  зона пластичних деформацій (зона пластичності) поступово розповсюджувалась від внутрішньої поверхні на всю стінку труби.

Розв'язання даного тестового прикладу засвідчило, що кількість ітерацій розв'язання задачі НМСЕ із застосуванням алгоритму з екстраполяцією переміщень дозволяє скоротити обчислювальні витрати більше ніж в два рази (табл.1). При цьому зберігається достатньо висока

точність отриманих результатів (похибка менше 2%) порівняно з еталонний розв'язком отриманим в роботі [7].

Таблиця 1

$P, \text{MN} / \text{m}^2$	Еталон	Алгоритм без екстраполяції переміщень		Алгоритм з екстраполяцією переміщень (9)	
	Величина кільцевого напруження $\sigma_{\theta\theta'}$ і загальна кількість ітерацій N				
	$\sigma_{\theta\theta'}$ , МПа	$\sigma_{\theta\theta'}$ , МПа	N	$\sigma_{\theta\theta'}$ , МПа	N
0.037	0.0571	0.0575	9	0.0575	9
0.051	0.0541	0.0531	16	0.0535	14
0.059	0.0462	0.0456	36	0.0453	23
0.064	0.0412	0.0409	73	0.0404	35
0.07	0.0374	0.037	125	0.0367	57

*Термопружнопластичний розрахунок нерівномірно нагрітого куба.* Розглядаємо термопружнопластичний напружений стан статично визначеного куба розмірами  $10 \times 10 \times 10$  мм, що знаходиться в природному стані при температурі  $T_0 = 20^\circ \text{C}$ , а потім піддається нерівномірному нагріву при відсутності об'ємних і поверхневих сил [3]. Оскільки куб має три площини симетрії, для дослідження була взята восьма частина куба, дискретна модель якої наведена на рис.2.

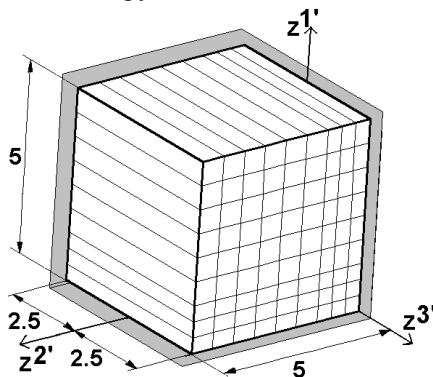


Рис.2. Розрахункова дискретна модель

Температурне поле в кубі характеризується функцією:

$$T = 800 \cos \pi z^1 \cos \pi z^2 \cos \pi(z^3 + 2.5)$$

Механічні характеристики не залежать від температури і мають наступний вигляд:  $E = 1.96 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 1/3$ ,  $\alpha_T = 1.5 \cdot 10^{-5}$  град $^{-1}$ .

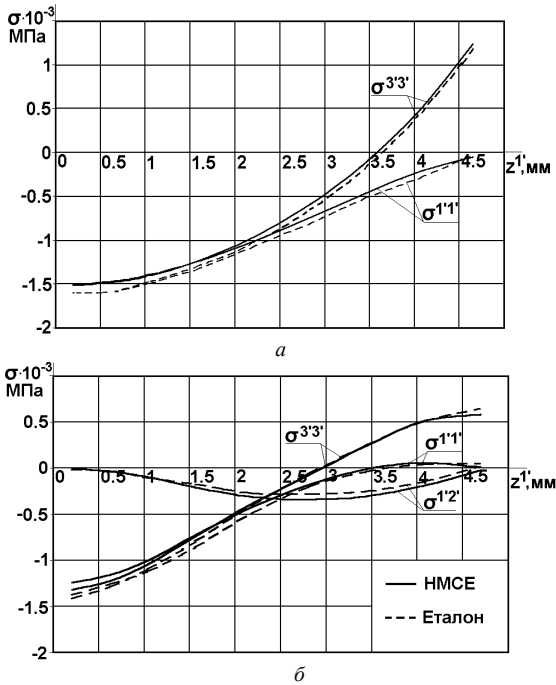


Рис. 3. Змінення напружень в поперечному перерізі куба

На рис.3 показана зміна компонентів напружень в залежності від координати  $z^1$ : при пружному деформуванні куба (рис. 3,а) при  $z^{2'} = 0.625$  мм,  $z^{3'} = -1.875$  мм; при пружнопластичному деформуванні (рис. 3,б) при  $z^{3'} = -1.875$  мм,  $z^{1'} = z^{2'}$ .

Порівняння параметрів напруженого стану куба результатів при пружному і пружнопластичному деформуванні отриманих за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів з результатами наведеними в роботі [3] показало, що в зоні максимальних значень напружень їх розбіжність складає менше 5%.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що нормальні напруження досягають своїх максимальних значень в центрі куба і навколо його поверхні. Причому, в центрі куба реалізується

напружений стан близький до всебічного стиску, а зниження рівня напружень за рахунок виникнення пластичних деформацій досягає 34%.

В даній задачі застосування алгоритму з екстраполяцією переміщень (9) дозволяє зменшити загальну кількість ітерацій більш ніж в два рази порівняно з розв'язком за алгоритмом, що не враховує екстраполяцію переміщень.

**Висновки.** В даній роботі описаний покроковий алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язкопружнопластичності призматичних тіл. Відмінність пропонованого алгоритму полягає у використанні екстраполяції переміщень поточного кроку на основі відомих величин переміщень попереднього кроку та даних про змінення параметрів зовнішнього навантаження. Отримані вирази для визначення величин температурних деформацій та обчислення напружень за наявності деформацій пластичності та повзучості. Достовірність отримуваних результатів розв'язання задач та ефективність застосування алгоритму доведена на тестових прикладах. Застосування алгоритму з екстраполяцією переміщень дозволяє зменшити обсяг обчислювальних витрат 1,5–3 рази в залежності від розглядуваної задачі.

Таким чином, отримані в роботі [2] розв'язувальні співвідношення НМСЕ для косокутного СЕ та приведений вище алгоритм складають методику розв'язання задач термов'язкопружнопластичності для призматичних тіл складної форми.

1. *Баженів В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Баженів В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності нмсе. // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2005. – вип. 76. – с. 3–26.
3. *Павльченко В.М.* Решение трехмерных задач термопластичности при простых процессах нагружения. // Проблемы прочности. –1986. – №1. – с. 77-81.
4. *Пискунов С.О.* Ефективність ітераційних алгоритмів розв'язання задач в'язкопружнопластичності в межах напіваналітичного методу скінченних елементів. // Науковий вісник Національного технічного університету України „КПІ”. № 46, 2005 г.
5. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.
6. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учётом жестких смещений. // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып. 24. – с. 147-156.
7. *Соколовский В.Н.* Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969.– 214 с.
8. *Уилкинс М.Л.* Расчет упруго-пластических течений. – В кн.: Вычислительные методы в гидротехнике. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.

УДК 539.3

Гуляєв В. І., д-р техн. наук,  
Белова М. О., канд. фіз.-мат. наук,  
Горбунович І. В.

## ДО РОЗРАХУНКУ СТІЙКОСТІ ТА КОЛИВАНЬ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ

Ефективним способом проходки шахтових стволів і свердловин великого діаметра є використання бурильних установок роторного типу. Основною умовою підвищення якості проходки стволів і свердловин є проведення буріння із заданою рейсовою швидкістю та із забезпеченням вертикальності осі ствола. Невиконання цих вимог призводить до звичайних утрат енергетичних ресурсів і часу. Наприклад, для бурових установок роторного типу при проходці шахтових вентиляційних стволів відхилення осі ствола від вертикалі не повинно перевищувати 1м на 100м глибини.

Великі глибини буріння, що визначають значні навантаження, та ефективність проходки стволів і свердловин викликають необхідність проведення розрахунків напружено-деформованого стану бурильної колони (БК), який багато в чому залежить від режимів буріння. Крім того, ефективність проходки стволів часто залежить від тих граничних режимів, які можуть розвинути бурові установки. Усе це вимагає врахування динамічних навантажень, як найбільш небезпечних ускладнень у процесі буріння [4, 7, 9]. Для цього необхідно дослідити напружено-деформований стан БК при динамічних навантаженнях і умови втрати її стійкості, яка є однією з основних причин відхилення буріння від заданого вертикального напрямку. При дослідженні цих проблем виникають певні труднощі, які досі у теорії розрахунку БК не були достатньо вивчені. До основних із них можна віднести вимушені коливання систем із розподіленими і зосередженими масами та вивчення на їх основі процесів у бурових установках, а також стійкості колони як вагомому стержню, що зазнає розтягу-стиску, при різних граничних умовах і великих глибинах буріння. Крім того, значна частина методів розв'язання практичних задач - це наближені методи, точність яких в існуючій літературі не оцінено. Тому розробка нових моделей динамічних процесів, уточнення розрахунків на міцність і стійкість БК та оцінка існуючих наближених розв'язків із визначенням границь їх застосування, що сприяють встановленню ефективних режимів буріння, якості проходки стволів і свердловин, запобіганню аварійних ситуацій, є

актуальною і важливою проблемою будівельної механіки та механіки деформованого твердого тіла.

Багаторічний досвід експлуатації бурильних установок свідчить, що від статичного навантаження БК руйнуються рідко. Більшість аварій на бурових установках відбувається від динамічних навантажень, які обумовлюють процеси руйнування конструкцій установок.

Із урахуванням технологічних процесів буріння на БК при роторному способі буріння діють різноманітні види навантажень, основними з яких є:

- розтяг на верхній ділянці колони від власної ваги колони та ваги обважнювачів із долотом;
- стиснення на нижній ділянці колони;
- згин на нижній ділянці колони;
- додаткові динамічні навантаження, що виникають при обертанні колони, при ударних процесах і вимушених коливаннях;
- крутильний момент, необхідний для обертання колони і руйнування породи;
- навантаження, обумовлені наявністю тертя з боку промивної рідини.

У процесі роторного буріння виникають статичні та динамічні навантаження. Якщо врахування статичних навантажень, як правило, особливих труднощів не завдає, то розрахунок на динамічні навантаження вимагає знання певних законів коливань, що викликає ускладнення у проведенні розрахунків.

Нехай бурильна колона обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Для побудови рівнянь її руху введемо інерційну систему координат  $OXYZ$  з початком у точці підвісу і пов'язану з колоною систему координат  $Oxyz$  з осями  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ , яка обертається разом з нею. У вихідному недеформованому стані осі  $OZ$  і  $Oz$  співпадають із поздовжньою віссю колони. Будемо досліджувати стійкість колони і її коливань у системі координат  $Oxyz$ , що обертається. Приймемо, що пружні переміщення її елементів вздовж осей  $Ox$  і  $Oy$  складають  $u$  і  $v$ , переміщеннями вздовж осі  $Oz$  знехтуємо.

Динамічна рівновага колони описується рівняннями згину балки в площинах  $xOz$  і  $yOz$  відповідно

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x, \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q_y. \quad (1)$$

Тут  $M_x$ ,  $M_y$  - внутрішні моменти в розглянутому перерізі балки, які діють відносно осей, що проходять через центр перерізу паралельно осям  $Ox$  і  $Oy$ ;  $q_x$  і  $q_y$  - інтенсивності зовнішніх навантажень, напрямлених паралельно відповідним осей.

Підкреслимо, що у випадку, який розглядається, для функцій  $M_x$ ,  $M_y$  стандартні рівності

$$M_x = EI \frac{d^2v}{dz^2}, \quad M_y = EI \frac{d^2u}{dz^2}$$

є неприйнятні, оскільки балка попередньо напружена повздовжньою силою  $T$  і зовнішнім крутильним моментом  $M_z$ , що викликає додаткові згинаючі моменти у балці при її деформуванні [6, 8]. Тому для згинаючих моментів використовуються формули

$$M_x = EI \frac{d^2v}{dz^2} - Tv + M_z \frac{du}{dz}, \quad M_y = EI \frac{d^2u}{dz^2} - Tu + M_z \frac{dv}{dz}, \quad (2)$$

в яких другі доданки в правих частинах визначають додаткові згинаючі моменти, обумовлені ексцентриситетом повздовжньої сили розтягу  $T$  при деформуванні балки, а треті доданки представляють добавки до згинаючих моментів, спричинені проектуванням зовнішнього крутильного моменту  $M_z$  на осі  $Ox$  і  $Oy$  при скривленні осьової лінії балки.

Для обчислення складових  $q_x$  і  $q_y$  повздовжнього розподіленого навантаження на балку необхідно враховувати, що в межах  $0 < z < L$ , де  $L$  - довжина балки, на неї не діють ніякі активні сили і роль цих сил виконують сили інерції, викликані обертанням балки та її пружними коливаннями. Тому вектор  $\vec{q}$  цього навантаження знаходиться за допомогою рівності

$$\vec{q} = -\rho F \vec{a}, \quad (3)$$

де  $\rho$  - густина матеріалу балки,  $F$  - площа її поперечного перерізу,  $\vec{a}$  - абсолютне прискорення елемента, що розглядається. Знаходячи вектор  $\vec{q}$ , урахуємо, що механічна поведінка балки розглядається в системі координат  $Oxyz$ , яка обертається; у зв'язку з цим рух кожного елемента є складним. У цьому випадку його абсолютне прискорення  $\vec{a}$  обчислюють за формулою Коріоліса [2]

$$\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c, \quad (4)$$

де  $\vec{a}^e$ ,  $\vec{a}^r$ ,  $\vec{a}^c$  - вектори переносного, відносного та коріолісового прискорення відповідно.

Вектор переносного прискорення  $\vec{a}^e$  знаходять за формулою

$$\vec{a}^e = \vec{\omega} \times (\omega \times \vec{r}), \quad (5)$$

де  $\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + z\vec{k}$  - радіус-вектор елемента балки в системі координат  $Oxyz$ .

Виконавши відповідні векторні операції, дістанемо

$$a_x^e = -\omega^2 u, \quad a_y^e = -\omega^2 v, \quad a_z^e = 0. \quad (6)$$

Складові вектора відносного прискорення в напрямках осей координат  $Oxyz$  визначаються рівностями

$$a_x^r = \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad a_y^r = \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad a_z^r = 0. \quad (7)$$

Вектор коріолісового прискорення  $\vec{a}^c$  елемента балки обчислюється за формулою

$$\vec{a}^c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}^r, \quad (8)$$

де  $\vec{V}^r$  - вектор відносної швидкості елемента зі складовими

$$V_x^r = \frac{du}{dt}, \quad V_y^r = \frac{dv}{dt}, \quad V_z^r = 0. \quad (9)$$

Враховуючи рівності (7), (8), дістаємо

$$a_x^c = -\omega \frac{dv}{dt}, \quad a_y^c = \omega \frac{du}{dt}, \quad a_z^c = 0. \quad (10)$$

Підставляючи знайдені значення компонент прискорень (6), (7), (10) в (4), а потім у (3), отримуємо складові вектора сил інерції

$$\begin{aligned} q_x &= -\rho F \left( -\omega^2 u - 2\omega \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right), \\ q_y &= -\rho F \left( -\omega^2 v - 2\omega \frac{du}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Після переходу від звичайних похідних до частинних на основі співвідношень (1), (2), (11) будуть рівняння коливань балки, яка обертається і напружена повздовжньою силою  $T$  і крутильним моментом  $M_z$

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \rho F \omega^2 u - 2\rho F \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (12)$$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \rho F \omega^2 v + 2\rho F \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

За допомогою цієї системи можна досліджувати динамічну поведінку і стійкість бурильної колони. Роль повздовжньої сили  $T$  в цьому випадку виконує внутрішня сила, що викликається дією реакцій на верхньому кінці закріплення і на нижньому кінці спирання ріжучого інструмента, а також силами ваги самої колони. Крутильний момент  $M_z$ , що діє на колону спричинено силами опору різанню на нижньому кінці та приводним крутильним моментом на верхньому кінці. У зв'язку з цим звичайно вважають, що величина  $T$  лінійно змінюється вздовж координати  $z$ , а  $M_z$  залишається сталим.

Відзначимо, що система (12), не зважаючи на її лінійність, має досить складну структуру, обумовлену наявністю доданків виду  $\partial^2(M_z \cdot \partial v / \partial z) \partial z^2$ ,  $-\partial^2(M_z \cdot \partial u / \partial z) \partial z^2$  і  $-2\rho F \omega \partial v / \partial t$ ,  $-2\rho F \omega \partial u / \partial t$  у першому і другому рівняннях. Так, присутність перших двох доданків призводить до того, що система не допускає розв'язку у формі плоскої кривої й осьова лінія зігнутої колони може бути тільки тривимірною кривою (у даному випадку - спіраллю). Наявність інших двох доданків призводить до складнішого закону зміни форми коливань як за просторовою, так і часовою координатами, виключаючи можливість руху елементів колони з однією спільною фазою.

Зазначене ускладнення форм коливань призводить до суттєвого ускладнення і методики дослідження. Оскільки аналітичні методи для розв'язання цієї системи виявляються неприйнятними, при їх теоретичному моделюванні слід орієнтуватися на чисельні підходи. Проте й при їх використанні виникають суттєві труднощі, пов'язані з необхідністю розглядати колони великої довжини. На великих інтервалах інтегрування система (12) набуває так званої "обчислювальної жорсткості", у результаті чого суттєво погіршується збіжність чисельних методів її інтегрування. У даній роботі для дослідження системи пропонується використати метод початкових параметрів разом з методом Рунге - Кутта і процедурою ортогоналізації за Годуновим.

Розглянемо алгоритм побудови розв'язку системи (12) на прикладі задачі про стійкість буринної колони. У цьому випадку рівняння (12) зводяться до виду

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 u}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left( T \frac{du}{dz} \right) - M_z \frac{d^3 v}{dz^3} - \rho F \omega^2 u &= 0, \\ EI \frac{d^4 v}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left( T \frac{dv}{dz} \right) + M_z \frac{d^3 u}{dz^3} - \rho F \omega^2 v &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Нехай на кінцях  $Z=0$  і  $Z=L$  колону шарнірно закріплено і реалізуються крайові умови

$$\begin{aligned} u(0) = v(0) = 0, \quad \left. \frac{d^2 u}{dz^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{d^2 v}{dz^2} \right|_{z=0} &= 0, \\ u(L) = v(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 u}{dz^2} \right|_{z=L} = \left. \frac{d^2 v}{dz^2} \right|_{z=L} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Будемо вважати кутову швидкість  $\omega$  параметром і розглянемо задачу про визначення його значення, при якому колона випинається. Тоді для системи (13), (14) потрібно поставити задачу на власні значення. Для цього запишемо її в векторній формі

$$\frac{d^4 \vec{y}}{dz^4} = F(z) \vec{y} + \omega^2 \vec{y}, \quad (15)$$

$$A \vec{y}(0) = 0, \quad B \vec{y}(L) = 0. \quad (16)$$

Тут  $\vec{y}(z)$  восьмивимірний вектор невідомих,  $F(z)$  змінна матриця коефіцієнтів розміру  $8 \times 8$ ,  $A, B$  - сталі матриці розміру  $4 \times 8$ .

Розв'язок системи (15) будемо у формі Коші [1]

$$\vec{y}(z) = Y(z) \cdot \vec{C}, \quad (17)$$

де  $Y(z)$  - матриця Коші розміру  $8 \times 8$  розв'язків системи (15) з початковими умовами

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_8)^T$  - шуканий сталий вектор. Його компоненти знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка будується підстановкою правої частини (17) у ліві частини умови (16). Значення  $\Omega$  в (15), при якому визначник матриці коефіцієнтів цієї системи дорівнює нулю, є критичним. При цьому значенні кутової швидкості бурильна колона втрачає стійкість. Форма втрати стійкості будується за допомогою рівності (17) підстановкою в її праву частину знайденого вектора  $\vec{C}$ . Аналогічно розв'язується задача про вільні коливання колони у часі в формі гармонік з шуканою частотою. Система рівнянь (12) з частинними похідними зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь, яка потім аналізується за наведеним вище алгоритмом.

Відзначимо, що в окремих випадках рівняння (13), що описують стійкість бурильної колони, мають аналітичні розв'язки, які можуть бути використаними для тестування розглянутої методики. Так, якщо кручення й обертання колони відсутні і вона знаходиться під дією поздовжньої стискуючої сили  $P$ , прикладеної на краях  $Z=0$  і  $Z=L$ , рівняння (13) спрощуються і розпадаються на два незв'язні рівняння

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} - P \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad EI \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

Вони визначають Ейлерову критичну силу [5]

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

Задача допускає просте розв'язання і у випадку балки, якщо  $T=0$ ,  $M_z=0$ . Тоді система також розпадається

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} - \rho F \omega^2 u = 0, \quad EI \frac{d^4 v}{dz^4} - \rho F \omega^2 v = 0.$$

Із неї можна знайти критичну швидкість [2, 3]

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

Проте при навантаженні системи крутильним моментом  $M_z$  рівняння (13) є зв'язаними, і задача визначення критичних параметрів системи ускладнюється. У випадку  $\omega=0$ ,  $T=-P=const$  і  $M_z=const$ , її розв'язання наведено в роботі [6]

$$M_z^{kp} = \pm \sqrt{EI} \cdot \sqrt{P_3 + P}.$$

Якщо три фактори навантаження стержня присутні одночасно і сила  $T \neq const$ , то задача стійкості не має аналітичного розв'язку. Для його побудови в цьому випадку зручно застосувати описаний вище підхід.

1. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху. – К.: Вища школа, 2004. – 526 с.
2. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. и др. Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. – Львов: Вища школа, 1983. – 287 с.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
4. Сароян А.Е. Теория и практика работы буровой колонны. – М.: Наука 1990. – 264 с.
5. Светлицкий В.А. Механика стержней. М.: Высшая школа, 1987. Ч. 2: Динамика. – 304 с.
6. Федосеев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.
7. Харченко Е.В. Динамические процессы буровых установок. – Львов: Свиточ, 1991. – 176 с.
8. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с.
9. Юртаев В.Г. Динамика буровых установок. – М.: Наука, 1987. – 155 с.

*Надійшло до редакції 16.10.2006 р.*

УДК 539.3:538.6:534.1

Шульга М.О., д-р фіз.-мат. наук

## ДО ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ТЕОРІЇ МАГНІТОСТРИКЦІЇ ФЕРИТІВ З ДИСИПАТИВНИМ ФЕРОМАГНІТНИМ РЕЗОНАНСОМ

Одними із актуальних задач електромагнітомеханіки, що мають важливе фундаментальне і прикладне значення, є дослідження магнітопружного деформування тіл із феримагнітних магнітострикційних матеріалів з врахуванням феромагнітного резонансу. Цьому питанню присвячені роботи [4-7, 9-16]. В даній статті пропонується перетворення системи тривимірних диференціальних рівнянь лінеаризованої магнітострикції феритів кубічної системи, в якій враховується феромагнітний резонанс і дисипативні властивості фізико-механічних властивостей, до системи гамільтонового типу.

Тривимірна зв'язана задача електромагнітомеханіки для матеріалів з магнітострикцією вимагає спільного розв'язання механічних рівнянь коливань

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \quad (1)$$

відносно механічних переміщень  $u_i$  і напружень  $\sigma_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) та квазістатичного наближення

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

рівнянь Максвелла відносно напруженості  $\mathbf{H}$  і індукції  $\mathbf{B}$  магнітного поля.

Системи (1) і (2) замикаються квадратичними по намагніченості  $\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/4\pi$  визначальними співвідношеннями магнітострикції [2, 9] феритів кубічної системи з феромагнітним резонансом, лінеаризованими в сколі статичного поля підмагнічування  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e_3$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 e_3$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \sigma_{22} &= c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} &= c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
\sigma_{32} &= c_{55} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\beta_2}{M_0} m_2, \\
\sigma_{31} &= c_{55} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\beta_2}{M_0} m_1, \\
\sigma_{12} &= c_{55} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad b_3 = \mu_{33} h_3, \\
b_2 &= h_2 + 4\pi m_2, \quad \frac{\partial m_2}{\partial t} + \frac{m_2}{\tau_r} = -\gamma \left( -H_0 m_1 + M_0 h_1 - \beta_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right), \\
b_1 &= h_1 + 4\pi m_1, \quad \frac{\partial m_1}{\partial t} + \frac{m_1}{\tau_r} = -\gamma \left( H_0 m_2 - M_0 h_2 + \beta_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right). \quad (3)
\end{aligned}$$

Малі збурення  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{b}$  магнітного поля задовольняють рівняння (2), які запишемо у вигляді

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} = 0, \quad h_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

де  $\Phi$  – магнітний потенціал.

У виразах (1)-(3) прийняті загальноновживані позначення [1, 2, 3, 8, 9]:  $c_{ik}$  – модулі пружності,  $\rho$  – густина,  $\beta_2$  – магнітопружна стала,  $\mu_{33}$  – магнітна проникність,  $\gamma$  – гіромагнітне відношення.

В рівняннях прецесії намагніченості додані дисипативні складові з часом релаксації  $\tau_r$  [1, 6, 7]. Експериментальні дані і їх теоретичні інтерпретації показують достатність використання одного параметру для опису втрат в феритах [1].

Лінеаризовані диференціальні рівняння прецесії компонент  $m_1$ ,  $m_2$  вектора намагніченості, які входять в систему (3), в загальному випадку можна подати [7] в інтегральній формі. При усталених гармонічних коливаннях з круговою частотою  $\omega$ , коли  $a(x_1, x_2, x_3, t) = \text{Re } a(x_1, x_2, x_3) \exp(-i\omega t)$  і для амплітудних множників  $a(x_1, x_2, x_3)$  залишаємо такі ж позначення, що і для  $a(x_1, x_2, x_3, t)$ , для амплітудних величин  $m_1(x_1, x_2, x_3)$  та  $m_2(x_1, x_2, x_3)$  знаходимо

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{\gamma}{\omega_H^2 - \omega_c^2} \left( i\beta_2 \omega_c \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) - \beta_2 \omega_H \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + M_0 \omega_H h_1 - iM_0 \omega_c h_2 \right), \\
m_2 &= -\frac{\gamma}{\omega_H^2 - \omega_c^2} \left( \beta_2 \omega_H \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + i\beta_2 \omega_c \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) - \right. \\
&\quad \left. - iM_0 \omega_c h_1 - M_0 \omega_H h_2 \right), \tag{5}
\end{aligned}$$

де  $\omega_H = \gamma H_0$  – частота феромагнітного резонансу,  $\omega_c = \omega + i\omega_r$ ,  $\frac{1}{\tau_r} = \omega_r$  – частота релаксації.

Після підстановки (5) в (3) для амплітудних величин  $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)$  і т.д. ( $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3, t) = \text{Re} \sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3) \exp(-i\omega t)$ ) і т.д.) одержимо вирази

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
\sigma_{22} &= c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
\sigma_{33} &= c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
\sigma_{32} &= c_{55^*} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + ic_{54^*} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + i\beta_{52} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \beta_{51} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\
\sigma_{31} &= -ic_{54^*} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + ic_{55^*} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \beta_{51} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i\beta_{52} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\
\sigma_{12} &= c_{55} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad b_3 = -\mu_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \\
b_2 &= 4\pi\beta_{51} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + 4\pi i\beta_{52} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + i\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\
b_1 &= -4\pi i\beta_{52} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + 4\pi\beta_{51} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}. \tag{6}
\end{aligned}$$

В формулах (6) використані позначення

$$\begin{aligned}
 c_{55*} &= c_{55} + \frac{4\pi\omega_H\gamma^2\beta_2^2}{(\omega_c^2 - \omega_H^2)\omega_M}, \\
 c_{54*} &= \frac{4\pi\omega_c\gamma^2\beta_2^2}{(\omega_c^2 - \omega_H^2)\omega_M}, \\
 \beta_{51} &= \frac{\omega_H\gamma\beta_2}{\omega_c^2 - \omega_H^2}, \quad \beta_{52} = \frac{\omega_c\gamma\beta_2}{\omega_c^2 - \omega_H^2}, \\
 \mu &= 1 - \frac{\omega_H\omega_M}{\omega_c^2 - \omega_H^2}, \quad \alpha = \frac{\omega_c\omega_M}{\omega_c^2 - \omega_H^2},
 \end{aligned} \tag{7}$$

причому  $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$ .

В дев'ять визначальних рівнянь (6), три рівняння механічних коливань (1) і одне рівняння

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} = 0 \tag{8}$$

входять амплітудні множники трьох механічних переміщень  $u_i(x_1, x_2, x_3)$ , шести механічних напружень  $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ , трьох компонент магнітної індукції  $b_i(x_1, x_2, x_3)$  і магнітного потенціалу  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ . Таким чином сукупність тринадцяти рівнянь (1), (6), (8) має тринадцять невідомих функцій.

Один шлях спрощення системи рівнянь (1), (6), (8) аналогічний виводу рівнянь Ламе-Нав'є теорії пружності в переміщеннях. Але тепер за незалежні невідомі треба взяти три амплітуди механічних переміщень  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  та магнітного потенціалу  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ . В результаті одержимо систему чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних. Ця система досить громіздка і її явного вигляду виписувати не будемо.

Інший шлях спрощення системи тринадцяти рівнянь (1), (6), (8) полягає у спеціальному виборі восьми розв'язувальних функцій і аналогічний перетворенню системи дев'яти рівнянь пружності до шести рівнянь, які формально можна представити у вигляді операторної гамільтонової системи. Таке представлення вперше було запропоновано і виконано в монографії [3] і розвинуто в подальших роботах [8, 9 та ін.].

Виберемо за розв'язуючі функції певним чином підбраного наступного вектор-стовпчика невідомих

$$[\sigma_{11}, 4\mu_2, 4\mu_3, \varphi, 4\mu_1, \sigma_{12}, \sigma_{13}, b_1]^{TP}, \tag{9}$$

які входять в сукупність рівнянь (1), (6), (8). Після досить громіздких цілеспрямованих перетворень рівнянь (1), (6), (8) одержимо наступну систему восьми рівнянь

$$\frac{d}{dx_1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_{11} & \mathcal{E}_{12} & \mathcal{E}_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_{21} & \mathcal{E}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_{32} & \mathcal{K}_{33} & \mathcal{K}_{34} & \mathcal{E}_{31} & 0 & \mathcal{E}_{33} & \mathcal{E}_{34} \\ 0 & \mathcal{K}_{42} & \mathcal{K}_{43} & \mathcal{K}_{44} & 0 & 0 & \mathcal{E}_{43} & \mathcal{E}_{44} \\ -\mathcal{F}_{11} & -\mathcal{F}_{12} & -\mathcal{F}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{F}_{21} & -\mathcal{F}_{22} & -\mathcal{F}_{23} & -\mathcal{F}_{24} & 0 & 0 & -\mathcal{K}_{32} & -\mathcal{K}_{42} \\ -\mathcal{F}_{31} & -\mathcal{F}_{32} & -\mathcal{F}_{33} & -\mathcal{F}_{34} & 0 & 0 & -\mathcal{K}_{33} & -\mathcal{K}_{43} \\ 0 & -\mathcal{F}_{42} & -\mathcal{F}_{43} & -\mathcal{F}_{44} & 0 & 0 & -\mathcal{K}_{34} & -\mathcal{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Ненульові операторні елементи симетричних операторних матриць  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  та операторної матриці  $\mathbf{R}$  мають наступні значення

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11} &= -\frac{\rho\omega^2}{4\pi}, & \mathcal{E}_{12} &= -\frac{\partial}{\partial x_2}, & \mathcal{E}_{13} &= -\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \mathcal{E}_{22} &= \frac{1}{4\pi c_{55}}, & \mathcal{E}_{33} &= \frac{4\pi\mu}{\Delta_1}, & \mathcal{E}_{34} &= \frac{4\pi\beta_{51}}{\Delta_1}, & \mathcal{E}_{44} &= -\frac{c_{55^*}}{\Delta_1}, \\ -\mathcal{F}_{11} &= \frac{4\pi}{c_{11}}, & -\mathcal{F}_{12} &= -\frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{\partial}{\partial x_2}, & -\mathcal{F}_{13} &= -\frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ -\mathcal{F}_{22} &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \rho\omega^2 + \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right], \\ -\mathcal{F}_{23} &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \alpha_{11} - \left( c_{12} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}, & -\mathcal{F}_{24} &= \alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ -\mathcal{F}_{33} &= \frac{1}{4\pi} \left[ \rho\omega^2 - \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left( c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right], & -\mathcal{F}_{34} &= \alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \\ \mathcal{K}_{33} &= -ir_{11} \frac{\partial}{\partial x_2}, & \mathcal{K}_{34} &= -ir_{21} \frac{\partial}{\partial x_2}, & \mathcal{K}_{42} &= -ir_{12} \frac{\partial}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_{43}^{\epsilon} = -ir_{12} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathcal{K}_{44}^{\epsilon} = -ir_{22} \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (11)$$

Тут використані позначення

$$\begin{aligned} r_{11}r_{00} &= -\mu c_{54^*} - 4\pi\beta_{51}\beta_{52}, \\ r_{21}r_{00} &= -4\pi\alpha\beta_{51} - 4\pi\mu\beta_{52}, \\ r_{12}r_{00} &= \beta_{52}c_{55^*} - \beta_{51}c_{54^*}, \\ r_{22}r_{00} &= \alpha c_{55^*} - 4\pi\beta_{51}\beta_{52}, \\ r_{00} &= \mu c_{55^*} + 4\pi\beta_{51}^2, \\ -\alpha_{11} &= c_{55^*} + c_{54^*}r_{11} + 4\pi\beta_{52}r_{12}, \\ -\alpha_{12} &= \beta_{51} + \beta_{52}r_{11} + \alpha r_{12}, \\ -\alpha_{22} &= -\mu + \beta_{52}r_{21} + \alpha r_{22}. \end{aligned} \quad (12)$$

Систему (10) можна записати у вигляді операторної гамільтонової системи

$$\frac{dq_i}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (13)$$

при наступному значенні операторної функції Гамільтона

$$H = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ik}^{\epsilon} q_i q_k + \mathcal{G}_{ik}^{\epsilon} p_i q_k + \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ik}^{\epsilon} p_i p_k. \quad (14)$$

Елементи операторних матриць  $\mathcal{F}^{\epsilon}$ ,  $\mathcal{G}^{\epsilon}$ ,  $\mathcal{C}^{\epsilon}$  в (14) і (13) розглядаються як сталі величини і тільки після обчислення частинних похідних в (13) їх треба розглядати як диференціальні оператори, що діють на канонічні змінні  $q_i$ ,  $p_i$ .

Таким чином в результаті описаних перетворень система тринадцяти рівнянь (1), (6), (8) звелась до восьми рівнянь (10) або (13), відносно функцій (9). Таке представлення особливо буде доцільним при розв'язанні крайових задач з межами  $x_1 = const$ , тому що функції (9) при досконалому механічному і електромагнітному контактах при  $x_1 = const$  будуть неперервними функціями на цих межах.

У випадку антиплоскої задачі для хвиль зсуву рівняння лінеаризованої магнітострикції феритів з дисипативним феромагнітним резонансом розглядалися в роботах [6, 7] і були перетворені [7] до операторної гамільтонової системи.

Робота виконана при частковій фінансовій підтримці в рамках “Комплексного інтеграційного проекту СВ РАН та НАН України”.

1. *Гуревич А.Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 407 с.
2. *Taker Дж., Рэммон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. – Москва: Мир, 1975. – 453 с.
3. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наукова думка, 1981. – 200 с.
4. *Шульга М.О.* Про поширення поперечних хвиль в магнітопружних періодичних середовищах // Доп. НАН України. – 2002. – № 7. – С. 60 – 63.
5. *Шульга М.О.* До теорії магнітопружних хвиль в періодичних середовищах // Доп. НАН України. – 2002. – № 8. – С. 55 – 59.
6. *Шульга Микола.* Застосування гамільтонового формалізму в теорії поширення магнітов'язкопружних хвиль зсуву в неоднорідно-періодичних середовищах // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 3. – 217-224.
7. *Шульга М.О.* Про визначальні співвідношення лінеаризованої магнітострикції феритів // Доп. НАН України. – 2006. – №8. – С. 67-71.
8. *Shul'ga N.A.* Propagation of elastic waves in periodic-nonhomogeneous space // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 7. – P. 763-796.
9. *Shul'ga N.A.* Propagation of coupled waves in layered-periodic continua for interaction an electromagnetic field // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 10. – P. 1146-1172.
10. *Shul'ga N.A., Levchenko V.V., Ratushnyak T.V.* Surface magnetoelastic shear waves in periodic-dielectric regularly stratified structures // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 11. – P. 1305-1309.
11. *Shul'ga N.A., Ratushnyak T.V.* Oscillation modes of magnetoelastic Lave-type waves in periodic-dielectric media // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, № 8. – P. 886-892.
12. *Shul'ga N.A., Ratushnyak T.V.* Spatial shapes of magnetoelastic shear body waves at the transmission edges in a periodically inhomogeneous magnetostrictive medium // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 3. – P. 300-307.
13. *Shul'ga N.A., Levchenko V.V., Ratushnyak T.V.* Propagation of magnetoelastic shear waves across layers in a periodically layered medium // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 6. – P. 655-660.
14. *Shul'ga N.A., Ratushnyak T.V.* On shapes of body waves in periodically inhomogeneous, magnetostrictive, dielectric materials // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 7. – P. 775-781.
15. *Shul'ga N.A.* Effective magnetoelastic properties of laminated composites // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 8. – P. 879-885.
16. *Shul'ga N.A., Ratushnyak T.V.* Volume magnetoelastic shear waves in periodically inhomogeneous media // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 10. – P. 1090-1101.

Надійшло до редакції 13.10.2006 р.

УДК 539.03

Гоцуляк Є.О., д-р техн. наук.  
Пасічник Р.В.

## СТІЙКІСТЬ ЧОТИРЬОХПЕЛЛОСТКОВОГО ГІПАРА

У будівництві в якості жорстких просторових покриттів промислових та громадських будівель поряд з круглими і прямокутними в плані випуклими оболонками, що мають додатну гаусову кривину використовуються також гіперболічні параболоїди, увігнуто-випукла поверхня яких має від'ємну гаусову кривину. Удосконалення конструктивних елементів покриття в промислових спорудах шляхом заміни лінійних конструкцій покриття просторовою системою-оболонкою дозволяє знизити витрату бетону і металу на одиницю площі споруди і зменшити вартість покриття. Крім цього, в багатьох випадках будівництва споруд громадського призначення великих прольотів оболонка являється єдиною можливою конструкцією покриття.

Архітектурна виразність, простота утворення лінійної поверхні і висока технологічність, можливість комбінувати різноманітні типи покриттів в поєднанні з загальними перевагами оболонок дозволяє виділити оболонки типу гіперболічного параболоїда як конструкції, що являють собою велику практичну цінність.

Композиційні та архітектурні переваги гіпарів впливають з самої форми оболонки, яка, завдяки прямолінійним краям, добре спрягається з іншими контурними елементами покриття.

Статичні переваги гіпарів перед випуклими оболонками полягають в тому, що вони добре протистоять втраті стійкості завдяки взаємодії розтягуючих і стискуючих напружень, що виникають відповідно вздовж увігнутої та випуклої парабол.

Поряд з перевагами гіпари мають ряд недоліків порівняно з випуклими оболонками. Найбільш суттєвим недоліком залізобетонних оболонок в формі гіперболічних параболоїдів є розтягуючі напруження, що виникають в напрямку увігнутих парабол. Такі напруження можуть привести до виникнення тріщин в бетоні і до подальшої корозії арматури. Проте лінійна поверхня гіпарів зручна для надання бетону попереднього напруження.

Іншою статичною особливістю являється необхідність закріплення двох протилежних кутів, оскільки під дією рівномірно розподіленого навантаження прямокутний контур може зазнати перекосу в плані. Фіксація досягається влаштуванням розтягнутого елемента між нижніми

кутами, або влаштуванням в цих місцях контрфорсів. На практиці для сприйняття розпору в більшості випадків використовують затяжку.

Для дискретизації континуальної задачі теорії оболонок використовується метод криволінійних сіток. На серединній поверхні оболонки будуються координатні лінії недеформованої системи координат  $i, j$ . Визначаючи вектор внутрішніх зусиль на лініях між вузлами різницевої сітки, рівняння рівноваги у вузлі  $(i, j)$  перетворюється до різницевого вигляду.

Враховуючи специфіку деформування тонких оболонок, що проявляється в суттєвій зміні зовнішньої метрики при незначній зміні внутрішньої, подається вираз базисних векторів точок деформованої поверхні у вигляді

$$\bar{e}_\alpha^* = \bar{e}_\alpha + \Delta \bar{e}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Вирази приросту векторів основного локального базису будуть мати вигляд

$$\Delta \bar{e}_\alpha = [\bar{\Omega} \times \bar{e}_\alpha] \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

або

$$\Delta \bar{e}_1 = -\vartheta_1 \bar{e}_3, \quad \Delta \bar{e}_2 = -\vartheta_2 \bar{e}_3, \quad \Delta \bar{e}_3 = \vartheta_2 \bar{e}^2 + \vartheta_1 \bar{e}^1. \quad (2)$$

Виходячи з рівнянь рівноваги і вводячи в розглянуті прирости базисних векторів (2) та накопичених зусиль  $T^{\alpha t}$  ( $\alpha = 1, 2; t = 1, 2, 3$ ), лінеаризовані рівняння рівноваги тонкої оболонки представляються в вигляді

$$\begin{aligned} & 0.5 \left\{ \sqrt{a_{i+0.5; j+0.5}} + \sqrt{a_{i+0.5; j-0.5}} \right\} \times \\ & \times \left[ T^{11} \bar{e}_1^* - T^{11} \vartheta_1 \bar{e}_3 + T^{12} \bar{e}_2^* - T^{12} \vartheta_2 \bar{e}_3 + T^{13} \bar{e}_3^* + T^{13} (\vartheta_1 \bar{e}^1 + \vartheta_2 \bar{e}^2) \right]_{i+0.5; j} - \\ & - \left( \sqrt{a_{i-0.5; j+0.5}} + \sqrt{a_{i-0.5; j-0.5}} \right) \times \\ & \times \left[ T^{11} \bar{e}_1^* - T^{11} \vartheta_1 \bar{e}_3 + T^{12} \bar{e}_2^* - T^{12} \vartheta_2 \bar{e}_3 + T^{13} \bar{e}_3^* + T^{13} (\vartheta_1 \bar{e}^1 + \vartheta_2 \bar{e}^2) \right]_{i-0.5; j} + \\ & + \left( \sqrt{a_{i+0.5; j+0.5}} + \sqrt{a_{i-0.5; j+0.5}} \right) \times \\ & \times \left[ T^{21} \bar{e}_1^* - T^{21} \vartheta_1 \bar{e}_3 + T^{22} \bar{e}_2^* - T^{22} \vartheta_2 \bar{e}_3 + T^{23} \bar{e}_3^* + T^{23} (\vartheta_1 \bar{e}^1 + \vartheta_2 \bar{e}^2) \right]_{i; j+0.5} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\sqrt{a_{i+0.5;j-0.5}} + \sqrt{a_{i-0.5;j-0.5}}\right) \times \tag{3} \\
& \times \left[ T^{21} \bar{e}_1^* - T^{21} \vartheta_1 \bar{e}_3^* + T^{22} \bar{e}_2^* - T^{22} \vartheta_2 \bar{e}_3^* + T^{23} \bar{e}_3^* + T^{23} (\vartheta_1 \bar{e}_1^* + \vartheta_2 \bar{e}_2^*) \right]_{i;j-0.5} + \\
& + 0.5 \left[ \sqrt{a} (q^1 \bar{e}_1 + q^2 \bar{e}_2 + q^3 \bar{e}_3) \right]_{i+0.5;j+0.5} + 0.5 \left[ \sqrt{a} (q^1 \bar{e}_1 + q^2 \bar{e}_2 + q^3 \bar{e}_3) \right]_{i+0.5;j-0.5} + \\
& + 0.5 \left[ \sqrt{a} (q^1 \bar{e}_1 + q^2 \bar{e}_2 + q^3 \bar{e}_3) \right]_{i-0.5;j+0.5} + \\
& + 0.5 \left[ \sqrt{a} (q^1 \bar{e}_1 + q^2 \bar{e}_2 + q^3 \bar{e}_3) \right]_{i-0.5;j-0.5} \} \bar{e}'_{i;j} = 0,
\end{aligned}$$

де  $t=1, 2, 3$  визначає номер рівняння.

Нехтуючи членами, що містять накопичене значення поперечних зусиль

$T^{\alpha 3}$ , як це прийнято в теорії стійкості тонких оболонок, лінеаризовані рівняння подаються в кінцевому вигляді

$$\begin{aligned}
& 0.5 \left\{ \sqrt{a_{i+0.5;j+0.5}} + \sqrt{a_{i+0.5;j-0.5}} \right\} \times \\
& \times \left[ T^{11} \bar{e}_1^* + T^{12} \bar{e}_2^* + T^{13} \bar{e}_3^* - T^{11} \vartheta_1 \bar{e}_3^* - T^{12} \vartheta_2 \bar{e}_3^* \right]_{i+0.5;j} - \\
& - \left( \sqrt{a_{i-0.5;j+0.5}} + \sqrt{a_{i-0.5;j-0.5}} \right) \times \\
& \times \left[ T^{11} \bar{e}_1^* + T^{12} \bar{e}_2^* + T^{13} \bar{e}_3^* - T^{11} \vartheta_1 \bar{e}_3^* - T^{12} \vartheta_2 \bar{e}_3^* \right]_{i-0.5;j} + \\
& + \left( \sqrt{a_{i+0.5;j+0.5}} + \sqrt{a_{i-0.5;j+0.5}} \right) \times \\
& \times \left[ T^{21} \bar{e}_1^* + T^{22} \bar{e}_2^* + T^{23} \bar{e}_3^* - T^{21} \vartheta_1 \bar{e}_3^* - T^{22} \vartheta_2 \bar{e}_3^* \right]_{i;j+0.5} - \tag{4} \\
& - \left( \sqrt{a_{i+0.5;j-0.5}} + \sqrt{a_{i-0.5;j-0.5}} \right) \times \\
& \times \left[ T^{21} \bar{e}_1^* + T^{22} \bar{e}_2^* + T^{23} \bar{e}_3^* - T^{21} \vartheta_1 \bar{e}_3^* - T^{22} \vartheta_2 \bar{e}_3^* \right]_{i;j-0.5} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0.5 \left[ \sqrt{a} (q^1 \bar{e}_1 + q^2 \bar{e}_2 + q^3 \bar{e}_3) \right]_{i+0.5; j+0.5} + 0.5 \left[ \sqrt{a} (q^1 \bar{e}_1 + q^2 \bar{e}_2 + q^3 \bar{e}_3) \right]_{i-0.5; j+0.5} + \\
& + 0.5 \left[ \sqrt{a} (q^1 \bar{e}_1 + q^2 \bar{e}_2 + q^3 \bar{e}_3) \right]_{i+0.5; j-0.5} + \\
& + 0.5 \left[ \sqrt{a} (q^1 \bar{e}_1 + q^2 \bar{e}_2 + q^3 \bar{e}_3) \right]_{i-0.5; j-0.5} \cdot \bar{e}_{i;j}^t = 0,
\end{aligned}$$

В рівнянні (4) доданки, що задають зовнішній вплив, визначені для сил, котрі в процесі деформування не змінюють свого напрямку. У випадках, коли в процесі деформування оболонки зовнішні сили змінюють свою початкову орієнтацію, члени рівняння рівноваги, що характеризують навантаження, є нелінійними, тому в (4) враховується додаток

В рівняннях введені позначення для величин, що являються коефіцієнтами перетворення координат базису в точці  $(i \pm 0,5; j \pm 0,5)$  з координатами базису в точці  $(i, j)$

$$\bar{a}_{S_{i \pm 0,5; j \pm 0,5}}^{t_{i;j}} = \bar{e}_{S_{i \pm 0,5; j \pm 0,5}}^* \cdot \bar{e}^{-t_{i;j}} \quad (S, t = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Вирази поперечних зусиль  $T^{\alpha 3}$ , що входять до рівнянь рівноваги (36), отримуються з (30) та (31)

$$\begin{aligned}
T_{i+0.5; j}^{13} &= \left[ (aM^{11})_{i+1; j} a_{2_{i+0.5; j}}^{2_{i+1; j}} - (aM^{11})_{i; j} a_{2_{i+0.5; j}}^{2_{i; j}} + (aM^{12})_{i; j} a_{2_{i+0.5; j}}^{1_{i; j}} - \right. \\
&- (aM^{12})_{i+1; j} a_{2_{i+0.5; j}}^{1_{i; j}} + (aM^{21})_{i+0.5; j+0.5} a_{2_{i+0.5; j}}^{2_{i+0.5; j+0.5}} - (aM^{21})_{i+0.5; j-0.5} a_{2_{i+0.5; j}}^{2_{i+0.5; j-0.5}} + \\
&+ (aM^{22})_{i+0.5; j-0.5} a_{2_{i+0.5; j}}^{1_{i+0.5; j-0.5}} - (aM^{22})_{i+0.5; j+0.5} a_{2_{i+0.5; j}}^{1_{i+0.5; j+0.5}} \left. \right] / a_{i+0.5; j}, \\
T_{i; j+0.5}^{23} &= \left[ (aM^{11})_{i-0.5; j+0.5} a_{1_{i; j+0.5}}^{2_{i-0.5; j+0.5}} - (aM^{11})_{i+0.5; j+0.5} a_{1_{i; j+0.5}}^{2_{i+0.5; j+0.5}} + \right. \\
&+ (aM^{12})_{i+0.5; j+0.5} a_{1_{i; j+0.5}}^{1_{i+0.5; j+0.5}} - (aM^{12})_{i-0.5; j+0.5} a_{1_{i; j+0.5}}^{1_{i-0.5; j+0.5}} + (aM^{21})_{i; j} a_{1_{i; j+0.5}}^{2_{i; j}} - \\
&- (aM^{21})_{i; j+1} a_{1_{i; j+0.5}}^{2_{i; j+1}} + (aM^{22})_{i; j+1} a_{2_{i; j+0.5}}^{1_{i; j+1}} - (aM^{22})_{i; j} a_{1_{i; j+0.5}}^{1_{i; j}} \left. \right] / a_{i; j+0.5}. \quad (8)
\end{aligned}$$

В різницевому рівнянні рівноваги мембранні зусилля  $T^{1\alpha}$  потрібні в точках між вузлами на лініях  $x^1$ , а  $T^{2\alpha}$  - між вузлами координатних ліній  $x^2$ . У відповідності з цим для застосування співвідношень (18) необхідно мати усі компоненти мембранних деформацій між вузлами на координатних лініях.

В результаті дискретизації диференціальних співвідношень (14) різницеві вирази компонент тензора мембранних деформацій набули вигляду:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11_{i+0,5;j}} &= U_{1_{i+1;j}} a_{1_{i+0,5;j}}^{1_{i+1;j}} + U_{2_{i+1;j}} a_{1_{i+0,5;j}}^{2_{i+1;j}} + U_{3_{i+1;j}} a_{1_{i+0,5;j}}^{3_{i+1;j}} - \\
&- U_{1_{i;j}} a_{1_{i+0,5;j}}^{1_{i;j}} + U_{2_{i;j}} a_{1_{i+0,5;j}}^{2_{i;j}} - U_{3_{i;j}} a_{1_{i+0,5;j}}^{3_{i;j}} + 0,5(\vartheta_1 \vartheta_1)_{i+0,5;j}, \\
\varepsilon_{22_{i;j+0,5}} &= U_{1_{i;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{1_{i;j+1}} + U_{2_{i;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i;j+1}} + U_{3_{i;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{3_{i;j+1}} - \\
&- U_{1_{i;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{1_{i;j}} + U_{2_{i;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i;j}} - U_{3_{i;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{3_{i;j}} + 0,5(\vartheta_2 \vartheta_2)_{i;j+0,5}, \\
\varepsilon_{12_{i+0,5;j}} &= 0,5 \left( U_{1_{i+1;j}} a_{2_{i+0,5;j}}^{1_{i+1;j}} + U_{2_{i+1;j}} a_{2_{i+0,5;j}}^{2_{i+1;j}} + U_{3_{i+1;j}} a_{2_{i+0,5;j}}^{3_{i+1;j}} - \right. \\
&- U_{1_{i;j}} a_{2_{i+0,5;j}}^{1_{i;j}} - U_{2_{i;j}} a_{2_{i+0,5;j}}^{2_{i;j}} - U_{3_{i;j}} a_{2_{i+0,5;j}}^{3_{i;j}} \left. \right) + 0,25 \left( U_{1_{i+1;j+1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{1_{i+1;j+1}} + \right. \\
&+ U_{2_{i+1;j+1}} a_{1_{i+0,5;j}}^{2_{i+1;j+1}} + U_{3_{i+1;j+1}} a_{1_{i+0,5;j}}^{3_{i+1;j+1}} + U_{1_{i+1;j}} a_{1_{i+0,5;j}}^{1_{i+1;j}} + U_{2_{i;j+1}} a_{1_{i+0,5;j}}^{2_{i;j+1}} + \\
&+ U_{3_{i+1;j}} a_{1_{i+0,5;j}}^{3_{i+1;j}} - U_{1_{i+1;j-1}} a_{1_{i+0,5;j}}^{1_{i+1;j-1}} - U_{2_{i+1;j-1}} a_{1_{i+0,5;j}}^{2_{i+1;j-1}} - U_{3_{i+1;j-1}} a_{1_{i+0,5;j}}^{3_{i+1;j-1}} - \\
&- U_{1_{i;j-1}} a_{1_{i+0,5;j}}^{1_{i;j-1}} - U_{2_{i;j-1}} a_{1_{i+0,5;j}}^{2_{i;j-1}} - U_{3_{i;j-1}} a_{1_{i+0,5;j}}^{3_{i;j-1}} \left. \right) + 0,5(\vartheta_1 \vartheta_2)_{i+0,5;j} \\
\varepsilon_{21_{i;j+0,5}} &= 0,25 \left( U_{1_{i+1;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{1_{i+1;j+1}} + U_{2_{i+1;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i+1;j+1}} + U_{3_{i+1;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{3_{i+1;j+1}} + \right. \\
&+ U_{1_{i+1;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{1_{i+1;j}} + U_{2_{i+1;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i+1;j}} + U_{3_{i+1;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{3_{i+1;j}} - U_{1_{i-1;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{1_{i-1;j+1}} - \\
&- U_{2_{i-1;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i-1;j+1}} - U_{3_{i-1;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{3_{i-1;j+1}} - U_{1_{i-1;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{1_{i-1;j}} - U_{2_{i-1;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i-1;j}} - \\
&- U_{3_{i-1;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{3_{i-1;j}} \left. \right) + 0,5 \left( U_{1_{i;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{1_{i;j+1}} + U_{2_{i;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i;j+1}} + U_{3_{i;j+1}} a_{2_{i;j+0,5}}^{3_{i;j+1}} - \right. \\
&- U_{1_{i;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{1_{i;j}} - U_{2_{i;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i;j}} - U_{3_{i;j}} a_{2_{i;j+0,5}}^{3_{i;j}} \left. \right) + 0,5(\vartheta_1 \vartheta_2)_{i;j+0,5}, \\
\varepsilon_{11_{i;j+0,5}} &= 0,25 \left( U_{1_{i+1;j+1}} a_{1_{i;j+0,5}}^{1_{i+1;j+1}} + U_{2_{i+1;j+1}} a_{1_{i;j+0,5}}^{2_{i+1;j+1}} + U_{3_{i+1;j+1}} a_{1_{i;j+0,5}}^{3_{i+1;j+1}} + \right. \\
&+ U_{1_{i+1;j}} a_{1_{i;j+0,5}}^{1_{i+1;j}} + U_{2_{i+1;j}} a_{1_{i;j+0,5}}^{2_{i+1;j}} + U_{3_{i+1;j}} a_{1_{i;j+0,5}}^{3_{i+1;j}} - U_{1_{i-1;j}} a_{1_{i;j+0,5}}^{1_{i-1;j}} - \\
&- U_{2_{i-1;j}} a_{1_{i;j+0,5}}^{2_{i-1;j}} - U_{3_{i-1;j}} a_{1_{i;j+0,5}}^{3_{i-1;j}} - U_{1_{i-1;j+1}} a_{1_{i;j+0,5}}^{1_{i-1;j+1}} - U_{2_{i-1;j+1}} a_{1_{i;j+0,5}}^{2_{i-1;j+1}} - \\
&- U_{3_{i-1;j+1}} a_{1_{i;j+0,5}}^{3_{i-1;j+1}} \left. \right) + 0,5(\vartheta_1 \vartheta_1)_{i;j+0,5},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22_{i+0,5;j}} = & 0,25 \left( U_{1_{i+1;j+1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{1_{i+1;j+1}} + U_{2_{i+1;j+1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{2_{i+1;j+1}} + U_{3_{i+1;j+1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{3_{i+1;j+1}} + \right. \\ & + U_{1_{i;j+1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{1_{i;j+1}} + U_{2_{i;j+1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{2_{i;j+1}} + U_{3_{i;j+1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{3_{i;j+1}} - U_{1_{i+1;j-1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{1_{i+1;j-1}} - \\ & - U_{2_{i+1;j-1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{2_{i+1;j-1}} - U_{3_{i+1;j-1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{3_{i+1;j-1}} - U_{1_{i;j-1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{1_{i;j-1}} - \\ & \left. - U_{2_{i;j-1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{2_{i;j-1}} - U_{3_{i;j-1}} a_{2_{i+0,5;j}}^{3_{i;j-1}} \right) + 0,5 (\vartheta_2 \vartheta_2)_{i+0,5;j}, \end{aligned}$$

Внутрішні моменти, що входять у вираз поперечних сил (8), визначаються як у вузлах, так і в центрах чарунок різницевої сітки, тому для застосування залежностей (8) необхідно мати компоненти тензора згинальних деформацій у вузлах і центрах різницевої сітки, дискретні вирази яких мають вигляд

$$\begin{aligned} \mu_{11_{i;j}} = & \sqrt{a_{i;j}} \left[ (\vartheta_1 / \sqrt{a})_{i+0,5;j} a_{2_{i+0,5;j}}^{2_{i;j}} - (\vartheta_2 / \sqrt{a})_{i+0,5;j} a_{1_{i+0,5;j}}^{2_{i;j}} + \right. \\ & \left. + (\vartheta_2 / \sqrt{a})_{i-0,5;j} a_{1_{i-0,5;j}}^{2_{i;j}} - (\vartheta_1 / \sqrt{a})_{i-0,5;j} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i;j}} \right], \\ \mu_{22_{i;j}} = & \sqrt{a_{i;j}} \left[ (\vartheta_1 / \sqrt{a})_{i;j-0,5} a_{2_{i;j-0,5}}^{1_{i;j}} - (\vartheta_2 / \sqrt{a})_{i;j+0,5} a_{1_{i;j+0,5}}^{1_{i;j}} + \right. \\ & \left. + (\vartheta_2 / \sqrt{a})_{i;j+0,5} a_{1_{i;j+0,5}}^{1_{i;j}} - (\vartheta_1 / \sqrt{a})_{i;j-0,5} a_{1_{i;j-0,5}}^{1_{i;j}} \right], \\ \mu_{12_{i;j}} = & 0,5 \sqrt{a_{i;j}} \left[ (\vartheta_1 / \sqrt{a})_{i-0,5;j} a_{2_{i-0,5;j}}^{1_{i;j}} - (\vartheta_1 / \sqrt{a})_{i+0,5;j} a_{2_{i+0,5;j}}^{1_{i;j}} + \right. \\ & + (\vartheta_2 / \sqrt{a})_{i+0,5;j} a_{1_{i+0,5;j}}^{1_{i;j}} - (\vartheta_2 / \sqrt{a})_{i-0,5;j} a_{1_{i-0,5;j}}^{1_{i;j}} + \\ & + (\vartheta_1 / \sqrt{a})_{i;j+0,5} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i;j}} - (\vartheta_1 / \sqrt{a})_{i;j-0,5} a_{2_{i;j-0,5}}^{2_{i;j}} + \\ & \left. + (\vartheta_2 / \sqrt{a})_{i;j-0,5} a_{1_{i;j-0,5}}^{2_{i;j}} - (\vartheta_2 / \sqrt{a})_{i;j+0,5} a_{1_{i;j+0,5}}^{2_{i;j}} \right], \\ \mu_{11_{i+0,5;j+0,5}} = & \sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} \times \\ & \times \left[ (\vartheta_1 / \sqrt{a})_{i+1;j+0,5} a_{2_{i+1;j+0,5}}^{2_{i+0,5;j+0,5}} - (\vartheta_1 / \sqrt{a})_{i;j+0,5} a_{2_{i;j+0,5}}^{2_{i+0,5;j+0,5}} + \right. \\ & \left. + (\vartheta_2 / \sqrt{a})_{i;j+0,5} a_{1_{i;j+0,5}}^{2_{i+0,5;j+0,5}} - (\vartheta_2 / \sqrt{a})_{i+1;j+0,5} a_{1_{i+1;j+0,5}}^{2_{i+0,5;j+0,5}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{22_{i+0,5;j+0,5}} &= \sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} \times \\
&\times \left[ \left( \vartheta_1 / \sqrt{a} \right)_{i+0,5;j} a_{2_{i+0,5;j}}^{1_{i+0,5;j+0,5}} - \left( \vartheta_1 / \sqrt{a} \right)_{i+0,5;j+1} a_{2_{i+0,5;j+1}}^{1_{i+0,5;j+0,5}} + \right. \\
&+ \left. \left( \vartheta_2 / \sqrt{a} \right)_{i+0,5;j+1} a_{2_{i+0,5;j+1}}^{1_{i+0,5;j+0,5}} - \left( \vartheta_2 / \sqrt{a} \right)_{i+0,5;j} a_{2_{i+0,5;j}}^{1_{i+0,5;j+0,5}} \right], \\
\mu_{12_{i+0,5;j+0,5}} &= 0,5 \sqrt{a_{i+0,5;j+0,5}} \times \\
&\times \left[ \left( \vartheta_1 / \sqrt{a} \right)_{i;j+0,5} a_{2_{i;j+0,5}}^{1_{i+0,5;j+0,5}} - \left( \vartheta_1 / \sqrt{a} \right)_{i+1;j+0,5} a_{2_{i+1;j+0,5}}^{1_{i+0,5;j+0,5}} + \right. \\
&+ \left( \vartheta_2 / \sqrt{a} \right)_{i+1;j+0,5} a_{2_{i+1;j+0,5}}^{1_{i+0,5;j+0,5}} - \left( \vartheta_2 / \sqrt{a} \right)_{i;j+0,5} a_{2_{i;j+0,5}}^{1_{i+0,5;j+0,5}} + \\
&+ \left( \vartheta_1 / \sqrt{a} \right)_{i+0,5;j+1} a_{2_{i+0,5;j+1}}^{2_{i+0,5;j+0,5}} - \left( \vartheta_1 / \sqrt{a} \right)_{i+0,5;j} a_{2_{i+0,5;j}}^{2_{i+0,5;j+0,5}} + \\
&+ \left. \left( \vartheta_2 / \sqrt{a} \right)_{i+0,5;j} a_{2_{i+0,5;j}}^{2_{i+0,5;j+0,5}} - \left( \vartheta_2 / \sqrt{a} \right)_{i+0,5;j+1} a_{2_{i+0,5;j+1}}^{2_{i+0,5;j+0,5}} \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Компоненти вектора кутів повороту елемента оболонки, що входять в дискретний вираз мембранних і згинальних деформацій (9), (10) отримано між вузлами на лініях різничевої сітки

$$\begin{aligned}
\vartheta_{1_{i+0,5;j}} &= U_{1_{i;j}} a_{3_{i+0,5;j}}^{1_{i;j}} - U_{1_{i+1;j}} a_{3_{i+0,5;j}}^{1_{i+1;j}} + U_{2_{2;j}} a_{3_{i+0,5;j}}^{2_{2;j}} - U_{2_{2+i;j}} a_{3_{i+0,5;j}}^{2_{2+i;j}} + \\
&+ U_{3_{3;j}} a_{3_{i+0,5;j}}^{3_{3;j}} - U_{3_{3+i;j}} a_{3_{i+0,5;j}}^{3_{3+i;j}} \\
\vartheta_{2_{i;j+0,5}} &= U_{1_{i;j}} a_{3_{i;j+0,5}}^{1_{i;j}} - U_{1_{i+1;j+1}} a_{3_{i;j+0,5}}^{1_{i+1;j+1}} + U_{2_{2;j}} a_{3_{i;j+0,5}}^{2_{2;j}} - U_{2_{2+i;j+1}} a_{3_{i;j+0,5}}^{2_{2+i;j+1}} + \\
&+ U_{3_{3;j}} a_{3_{i;j+0,5}}^{3_{3;j}} - U_{3_{3+i;j+1}} a_{3_{i;j+0,5}}^{3_{3+i;j+1}} \\
\vartheta_{1_{i;j+0,5}} &= 0,25 \left( U_{1_{i-1;j}} a_{3_{i;j+0,5}}^{1_{i-1;j}} + U_{1_{i-1;j+1}} a_{3_{i;j+0,5}}^{1_{i-1;j+1}} - U_{1_{i+1;j}} a_{3_{i;j+0,5}}^{1_{i+1;j}} - U_{1_{i+1;j+1}} a_{3_{i;j+0,5}}^{1_{i+1;j+1}} + \right. \\
&+ U_{2_{2-i;j}} a_{3_{i;j+0,5}}^{2_{2-i;j}} + U_{2_{2-i;j+1}} a_{3_{i;j+0,5}}^{2_{2-i;j+1}} - U_{2_{2+i;j}} a_{3_{i;j+0,5}}^{2_{2+i;j}} - U_{2_{2+i;j+1}} a_{3_{i;j+0,5}}^{2_{2+i;j+1}} + \\
&+ U_{3_{3-i;j}} a_{3_{i;j+0,5}}^{3_{3-i;j}} + U_{3_{3-i;j+1}} a_{3_{i;j+0,5}}^{3_{3-i;j+1}} - U_{3_{3+i;j}} a_{3_{i;j+0,5}}^{3_{3+i;j}} - U_{3_{3+i;j+1}} a_{3_{i;j+0,5}}^{3_{3+i;j+1}} \left. \right), \\
\vartheta_{2_{i+0,5;j}} &= 0,25 \left( U_{1_{i;j-1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{1_{i;j-1}} + U_{1_{i+1;j-1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{1_{i+1;j-1}} - U_{1_{i;j+1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{1_{i;j+1}} - U_{1_{i+1;j+1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{1_{i+1;j+1}} + \right. \\
&+ U_{2_{2;i;j-1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{2_{2;i;j-1}} + U_{2_{2+i;j-1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{2_{2+i;j-1}} - U_{2_{2;i;j+1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{2_{2;i;j+1}} - U_{2_{2+i;j+1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{2_{2+i;j+1}} + \\
&+ U_{3_{3;i;j-1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{3_{3;i;j-1}} + U_{3_{3+i;j-1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{3_{3+i;j-1}} - U_{3_{3;i;j+1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{3_{3;i;j+1}} - U_{3_{3+i;j+1}} a_{3_{i+0,5;j}}^{3_{3+i;j+1}} \left. \right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Остання підстановка співвідношень (11), (10),(9),(18), (8) дозволяє перейти від розгляду диференціального векторного рівняння рівноваги до системи алгебраїчних рівнянь.

В розробленому алгоритмі реалізовані граничні умови вільного краю, рухомого і нерухомого шарнірного опирання, квззачючого і жорсткого затиснення, симетричного і кососиметричного поля переміщень.

Наведемо граничні умови в контурних лініях сіткової області ( $i_l \leq i \leq i_m$ ;  $j_l \leq j \leq j_n$ ).

Для вільного краю, розміщеного вздовж лінії  $i=i_l$  справедливе співвідношення

$$\left\{ \left[ \sqrt{a} \left( T^{11} \bar{e}_1 + T^{12} \bar{e}_2 + T^{13} \bar{e}_3 \right) \right]_{i_l-0,5;j} + \left[ \left( aM^{11} \bar{e}^2 - aM^{12} \bar{e}^1 \right)_{i_l-0,5;j+0,5} \cdot \left( \bar{e}_1 / \sqrt{a} \right)_{i_l;j+0,5} \right] \bar{e}_3_{i_l;j+0,5} - \left[ \left( aM^{11} \bar{e}^2 - aM^{12} \bar{e}^1 \right)_{i_l-0,5;j-0,5} \cdot \left( \bar{e}_1 / \sqrt{a} \right)_{i_l;j-0,5} \right] \bar{e}_3_{i_l;j-0,5} \right\} \cdot \bar{e}_{i_l;j}^S = 0$$

$$(S = 1, 2, 3),$$

$$\left[ a \left( M^{11} \bar{e}^2 - M^{12} \bar{e}^1 \right)_{i_l;j} \cdot \left( \bar{e}_2 / a \right)_{i_l+0,5;j} \right] = 0.$$

На вільному краї вздовж лінії  $i \leq i_m$  в виразах (12) змінюються індекси  $i_l$  на  $i_m$ ,  $i_l-0,5$  на  $i_m+0,5$  і  $i_l+0,5$  на  $i_m-0,5$ .

Для вільного краю, що розміщений вздовж лінії  $j=j_l$  справедливі аналогічні рівності

$$\left\{ \left[ \sqrt{a} \left( T^{21} \bar{e}_1 + T^{22} \bar{e}_2 + T^{23} \bar{e}_3 \right) \right]_{i;j_l-0,5} + \left[ \left( aM^{22} \bar{e}^1 - aM^{21} \bar{e}^2 \right)_{i+0,5;j_l-0,5} \cdot \left( \bar{e}_2 / \sqrt{a} \right)_{i+0,5;j_l} \right] \bar{e}_3_{i+0,5;j_l} - \left[ \left( aM^{22} \bar{e}^1 - aM^{21} \bar{e}^2 \right)_{i+0,5;j_l+0,5} \cdot \left( \bar{e}_2 / \sqrt{a} \right)_{i-0,5;j_l} \right] \bar{e}_3_{i-0,5;j_l} \right\} \cdot \bar{e}_{i;j_l}^S = 0$$

$$(S = 1, 2, 3),$$

$$\left[ a \left( M^{22} \bar{e}^1 - M^{21} \bar{e}^2 \right)_{i;j_l} \cdot \left( \bar{e}_1 / a \right) \right]_{i;j_l+0,5} = 0.$$

На вільному краї вздовж лінії  $j_n$  у виразах (13) змінюються індекси  $j_l$  на  $j_n$ ,  $j_l-0,5$  на  $j_n+0,5$  і  $j_l+0,5$  на  $j_n-0,5$ .

Програмна реалізація умов на вільному краї здійснюється за допомогою виключення із різницевого рівняння тієї його частини, яка за

умовами (12) або (13) дорівнює нулю, що призводить до виключення невідомих в законтурних вузлах сітки. Основою фізичної інтерпретації цих умов може бути закладена та обставина, що в місцях відсутності матеріалу оболонки є відсутнім і вплив внутрішніх зусиль. У випадку ортогональної сітки граничний перехід в співвідношеннях (12) і (13) призводить до класичного виду граничних умов вільного краю.

$$T^{11} = T^{12} = T^{13} - \frac{\partial M^{12}}{\partial x^2} = M^{11} = 0, \quad (14)$$

$$T^{21} = T^{22} = T^{23} - \frac{\partial M^{21}}{\partial x^1} = M^{22} = 0. \quad (15)$$

У вузлі  $(i_l, j_l)$ , що розміщений на перетині двох контурних ліній з умовами вільного краю, із різницевого рівняння виключаються дві групи членів, які дорівнюють нулю згідно співвідношень (12) і (13). Таким чином, шаблон зменшується з двох сторін, що призводить до виключення усіх законтурних точок. Аналогічна операція виключення проводиться і в трьох інших вузлах  $(i_l, j_n)$   $(i_m, j_l)$   $(i_m, j_n)$ .

Різні варіанти шарнірного опирання і затиснення реалізовані за допомогою заміни одного або декількох співвідношень виду

$$(U_S)_{i_l; j} = 0 \quad (S = 1, 2, 3),$$

$$\left. \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} (\vartheta_1 \bar{e}_2 - \vartheta_2 \bar{e}_1) \right]_{i_l+0.5; j} + \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} (\vartheta_1 \bar{e}_2 - \vartheta_2 \bar{e}_1) \right]_{i_l-0.5; j} \right\} \cdot \bar{e}_{i_l; j}^2 = 0, \quad (16)$$

що виконуються для лінії  $i=i_l$ . Для контурної лінії  $j=j_l$  аналогічна заміна виконується за допомогою використання рівностей

$$(U_S)_{i; j_l} = 0 \quad (S = 1, 2, 3),$$

$$\left. \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} (\vartheta_2 \bar{e}_1 - \vartheta_1 \bar{e}_2) \right]_{i; j_l+0.5} + \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} (\vartheta_2 \bar{e}_1 - \vartheta_1 \bar{e}_2) \right]_{i; j_l-0.5} \right\} \cdot \bar{e}_{i; j_l}^1 = 0, \quad (17)$$

$$0.5 \left\{ \left[ \sqrt{a} \vartheta_1 \left( q^3 \bar{e}^1 - q^1 \bar{e}_3 \right) \right]_{i+0.5; j} + \left[ \sqrt{a} \vartheta_1 \left( q^3 \bar{e}^1 - q^1 \bar{e}_3 \right) \right]_{i-0.5; j} \right\} +$$

$$+ 0.5 \left\{ \left[ \sqrt{a} \vartheta_2 \left( q^3 \bar{e}^2 - q^2 \bar{e}_3 \right) \right]_{i; j+0.5} + \right.$$

$$+ \left[ \sqrt{a} \vartheta_2 \left( q^3 \bar{e}^2 - q^2 \bar{e}_3^* \right) \right]_{i=0.5; j} \left. \vphantom{\left[ \sqrt{a} \vartheta_2 \left( q^3 \bar{e}^2 - q^2 \bar{e}_3^* \right) \right]_{i=0.5; j}} \right\} \cdot \bar{e}_{i; j}^t \quad (t = 1, 2, 3). \quad (18)$$

Лінеаризовані вирази мембранних деформацій (14) мають вигляд

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0.5 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \bar{\alpha} \bar{e}_\beta + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \bar{\beta} \bar{e}_\alpha + \vartheta_\alpha \bar{\alpha} \bar{e}_\beta^* + \vartheta_\beta \bar{\beta} \bar{e}_\alpha^* \right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (19)$$

У співвідношеннях (4)-(19) зірочками позначені значення накопичених величин, змінні без зірочок позначають приріст цих величин. Використовуючи (4), (18), а також різниці представлення співвідношень (15)-(18), (19), (30), (31) в процедурі лінеаризації, отримуються лінеаризовані рівняння напружено-деформованого стану оболонки, коефіцієнти яких на  $r+1$  кроці алгоритму обчислюються з використанням характеристик стану попереднього стану на  $r$ -му кроці.

На основі вище наведених рівнянь виконано розрахунок на стійкість чотирьохпелюсткового гіпара з горизонтальним розміщенням коньків (рис.1). По контуру конструкції та в місцях з'єднання пелюсток між собою встановлено ребра жорсткості (на малюнку зображені потовщеними лініями). Розміри однієї пелюстки в плані  $0,2 \times 0,2$  м, стріла підйому  $2F=0,12$  м. Конструкція закріплена шарнірно нерухомо в нижніх кутових точках. Конструкція розраховувалась на дію рівномірно розподіленого по поверхні навантаження. В дослідженні визначалась залежність критичної сили втрати стійкості від площі поперечного перерізу ребер жорсткості. Результати наведені на графіку (Рис.2).

Як видно з графіка при відсутності ребер конструкцію експлуатувати неможливо.  $q_{кр} = 0,38 \times 10^3 \text{ Н/м}^2$ . Форма втрати стійкості в цьому випадку має вигляд рис.3.

При нульовій жорсткості контурних ребер збільшення жорсткості конькових ребер не приносить ніякого результату, конструкція втрачає стійкість при  $q_{кр} = 0,8 \times 10^3 \text{ Н/м}^2$ , тобто в цьому випадку конструкцію теж не можна експлуатувати. Форма втрати стійкості має вигляд рис.4.

При рівності нулю жорсткості конькових ребер максимальне збільшення площі поперечного перерізу контурних ребер до  $A1 = 4 \times 10^{-4} \text{ м}^2$  дає значення  $q_{кр} = 5,7 \times 10^3 \text{ Н/м}^2$ . Форма втрати стійкості в цьому випадку має вигляд рис. 5.

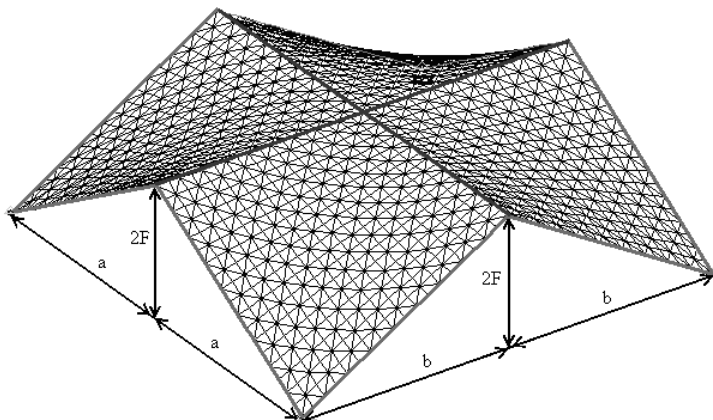


Рис. 1. Загальний вигляд конструкції чотирьохпелюсткового гіпара з горизонтальними коньковими ребрами. (Потовщеними лініями показані контурні та конькові ребра)

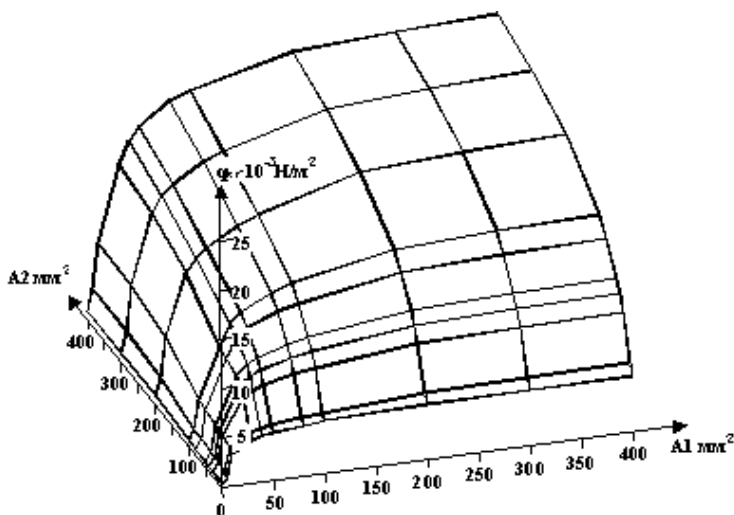


Рис. 2. Графік залежності критичного навантаження оболонки  $q_{cr}$  від площі поперечного перерізу ребер жорсткості розмішених по контуру (значення  $A_1$ ), та по горизонталі в місцях з'єднання пелюсток (значення  $A_2$ )

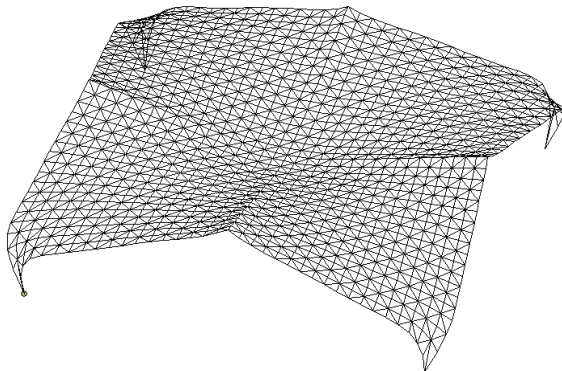


Рис. 3. Форма втрати стійкості при відсутності обох типів ребер жорсткості.  $q_{cr}=0.38 \times 10^3 \text{ Н/м}^2$

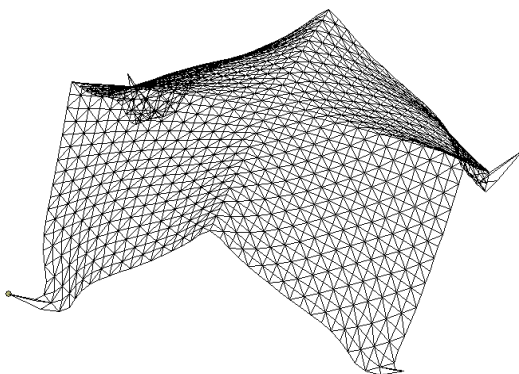


Рис. 4. Форма втрати стійкості при нульовій жорсткості контурних ребер.  $q_{cr}=0.8 \times 10^3 \text{ Н/м}^2$

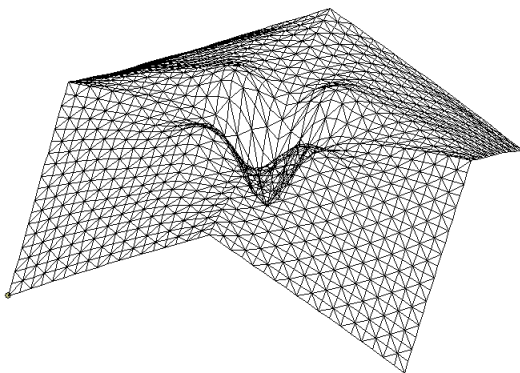


Рис. 5. Форма втрати стійкості при нульовій жорсткості конькових ребер.  $q_{cr}=5.7 \times 10^3 \text{ Н/м}^2$

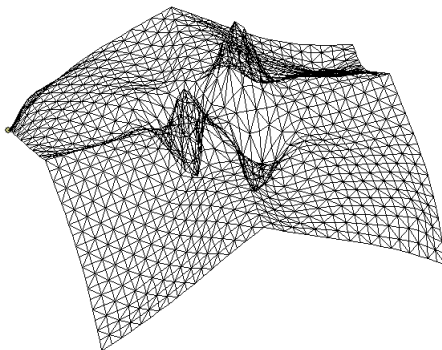


Рис. 6. Форма втрати стійкості при пропорційному збільшенні обох типів ребер.  
 $q_{кр}=27 \times 10^3 \text{ Н/м}^2$

Найбільший ефект досягається при одночасному збільшенні жорсткості обох видів ребер.(рис. 6.) Однак слід зауважити, що для даного прикладу графік залежності  $q_{кр}$  від площі поперечного перерізу контурних ребер перетворюється на горизонтальну лінію при  $A1=2 \times 10^4 \text{ м}^2$ . Для графіка  $q_{кр}$  від  $A2$  значення  $q_{кр}$  перестають зростати при  $A2=3,5 \times 10^{-4} \text{ м}^2$ . З неоднакової поведінки двох графіків можна зробити висновок, що жорсткість конькових ребер покращує стійкість конструкції лише при достатній жорсткості контурних ребер.

1. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. – Л.: Изд. Ленинград. ун-та, 1965, ч.2. – 395 с.
2. Самольянов И.И. Прочность, устойчивость и колебание гиперболического параболоида. Луцк. ЛИИ. 1992 – 318с.
3. Рассказов А.О. Расчет оболочек типа параболических параболоидов. Изд. Киевского Госуниверситета. Киев, 1972г.175с.
4. Гоцуляк Е.А. Ермишев В.Н Жадрасинов Н.Т Применение метода криволинейных сеток к расчету оболочек. – Киев. инж.-стр. ин-т. Киев, 1980. (Рукопись деп. в УкрНИИТИ, №2557-80) 23с.
5. Гоцуляк Е.А. Ермишев В.Н Нелинейный анализ устойчивости оболочек на основе трансформации собственных векторов и значений линеаризованного оператора. – Сб. Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып.54,-Киев: Будівельник, 1989.-С. 34
6. Гоцуляк Е.А О сеточной дискретизации векторных соотношений теории оболочек в криволинейной системе координат . – Прикладная механика: Междунар. научн. журнал. – 2001. – Т.37. - №6. – С.89-94.

Надійшло до редакції 11.12.2006 р.

УДК 539.3

Баженов В.А. д-р техн. наук  
Кривенко О.П. канд. техн. наук  
Соловей М.О. канд. техн. наук

## СТІЙКІСТЬ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ЛІНІЙНО-ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Підвищення загальної жорсткості та несучої спроможності гнучкої оболонки можна отримати за рахунок раціонального розподілу матеріалу (маси оболонки) в її об'ємі. Цей ефект досягається, наприклад, в оболонках зі змінною товщиною [1].

Огляд досліджень по теорії та методам розрахунку лінійних задач статички оболонок змінної товщини можна знайти в монографії Я.М.Григоренка та А.Т.Василенка [2]. Вплив законів розподілу гладко-змінної товщини на несучу спроможність гнучких оболонок мало досліджений [3-5]. Це пояснюється ускладненнями, які вносить у розробку геометрично нелінійних методів розрахунку на стійкість наявність змінної товщини.

За скінченноелементною методикою [6-8] у роботах [1, 9, 10] чисельно досліджений вплив на стійкість пологих сферичних панелей законів лінійного розподілу товщини за меридіаном. Виконувалися пошук раціональних форм та оцінка способів підвищення несучої спроможності тонких пологих оболонок при дії тиску. Методика розроблена на основі геометрично нелінійних співвідношень теорії термопружності з використанням моментної схеми скінченних елементів [7].

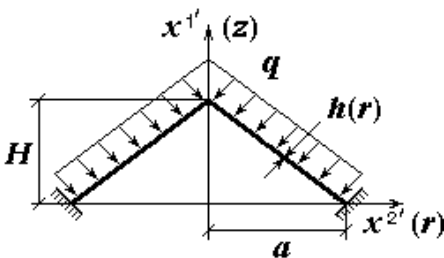


Рис. 1. Конічна панель змінної товщини

У продовження досліджень впливу лінійно-змінної товщини на стійкість гнучких оболонок у даній роботі наведені результати для пологих оболонок іншої геометричної форми – осесиметричних конічних панелей (рис. 1). Отримані розв'язки порівняні з результатами роботи Б.Я.Кантора [5]. В ній геометрично нелінійна задача

теорії пологих оболонок розв'язана в осесиметричній постановці

варіаційним методом з використанням гіпотези прямих нормалей. Математична модель панелі представлена як пластина з початковим прогином.

Результати досліджень подані з використанням наступних безрозмірних параметрів панелі, які прийняті в [5]:

$$\bar{q} = \frac{q}{E} \cdot \left( \frac{a}{h_{\bar{r}=0}} \right)^4, \quad \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{E} \cdot \left( \frac{a}{h_{\bar{r}=0}} \right)^2, \quad \bar{u}' = \frac{u'}{h_{\bar{r}=0}},$$

$$\bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{h}(\bar{r}) = \frac{h(\bar{r})}{h_{\bar{r}=0}}, \quad k = \frac{H}{h_{\bar{r}=0}}, \quad (1)$$

де  $r$  – радіальна координата точки у плані (рис. 1);  $a$  – радіус опорного контуру;  $h(\bar{r})$  – функція товщини;  $h_{\bar{r}=0}$  – товщина в центрі;  $h_{\bar{r}=1}$  – товщина на краю;  $H$  – стріла підйому;  $k$  – параметр, що характеризує пологість панелі;  $E, \nu$  – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона;  $\sigma_r$  – радіальна компонента тензора напруження;  $u'$  – переміщення в декартовій системі координат  $x^1$ .

Розглянута стійкість конічних панелей жорстко затиснутих за контуром (рис. 1) з лінійно-змінним розподілом товщини

$$h(\bar{r}) = h_{\bar{r}=0} [1 + (b_0 - 1)\bar{r}], \quad (2)$$

де безрозмірний параметр  $b_0 = h_{\bar{r}=1}/h_{\bar{r}=0}$  задає ступінь змінності товщини панелі за меридіаном. Значенню параметра  $b_0=1$  відповідає панель зі сталою товщиною  $h_{\bar{r}=0}$ .

Оболонки навантажуються зовнішнім рівномірно розподіленим нормальним тиском інтенсивністю  $q$ . Прийняті наступні вихідні данні:  $E = 19.6 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu=0.3$ ,  $a=1$  м,  $h_{\bar{r}=0}=0.01$  м,  $k=5$ ,  $H=0.05$  м. Розглядалися пологі панелі з величинами геометричних параметрів, для яких згідно до [5] характерне осесиметричне нелінійне деформування з утворенням осесиметричних ум'ятин. Тому за розрахункову модель для МСЕ була прийнята чверть конічної панелі з рівномірним розподілом скінченних елементів вздовж радіусу та за колом. Дослідження збіжності розв'язків для панелі сталої товщини показало, що достатньою є сітка  $12 \times 12$  СЕ. Враховуючи можливість появи складних осесиметричних форм деформування для оболонок змінної товщини за розрахункову прийнята більш густа сітка  $20 \times 20$  СЕ.

Порівняння нелінійних розв'язків проведене в діапазоні зміни параметра  $1 \leq b_o \leq 2$ , оскільки для нього існують розв'язки в [5]. Ця зміна параметра  $b_o$  відповідає потовщенню оболонки від центра до краю.

На всіх ділянках діаграм “навантаження-прогин у центрі панелі” (рис. 2) спостерігається гарний збіг з розв'язками [5]. У табл. 1 наведене чисельне порівняння розв'язків у верхній та нижній критичних точках. Маємо малий процент розходжень по величинам критичних навантажень  $\bar{q}_{kp}^e$  і  $\bar{q}_{kp}^H$  (від -4.2% до 5.7%) та відповідним величинам переміщень  $\bar{u}_{kp}^{I'e}$  і  $\bar{u}_{kp}^{I'H}$  у центрі панелі (від -11.9% до 8.9%).

На рис. 3 показана еволюція форми втрати стійкості оболонки при зміні величини параметра  $b_o$ . Для порівняння вихідна форма панелі зображена штрих-пунктирною лінією. Потовщення оболонки на краю панелі при збільшенні величини  $b_o$  веде до зміщення найбільш деформованої частини панелі (вмятини) від краю до центру. При цьому прогин у центральній частині оболонки менший ніж у вмятині.

На рис. 4 наведений розподіл безрозмірних величин згинних  $\bar{\sigma}_{r3}$  і мембранних  $\bar{\sigma}_{rm}$  напружень для кінчної панелі з параметрами  $k=5$  і  $b_o=1.5$  у різні моменти деформування: до втрати стійкості при  $\bar{u}^{I'}=1$ ; після втрати стійкості при  $\bar{u}^{I'}=6$ ; у позакритичній області при  $\bar{u}^{I'}=8$ . Згинні напруження добре співпадають з результатами роботи [5] вздовж усього радіуса оболонки (окрім центра), а мембранні – на більшій його частині (2/3 радіуса). Розходження мембранних напружень у центральній частині панелі та згинних напружень в її центрі можна пояснити різною точністю моделювання особливої точки – злому серединної поверхні в центрі кінчної оболонки.

Порівнюючи результати розрахунків для оболонок сферичної та кінчної форм (табл. 2), які отримані при однакових вихідних даних і значеннях параметра товщини  $b_o$ , можна зробити наступні висновки:

1. Об'єми (маса) матеріалу оболонок різної форми однаково суттєво зростають за рахунок зміни параметра  $b_o$  (у порівнянні з панеллю сталі товщини): для  $b_o=1.5$  на 33.3%, для  $b_o=2$  на 66.7%. При цьому об'єм панелі практично не залежить від форми її серединної поверхні – розходження об'ємів сферичної та кінчної оболонок не більше 0.15%.

2. Для оболонок сталюї товщини ( $b_0=1$ ) більш ефективною є сферична панель – величина верхнього критичного навантаження перевищує відповідне навантаження для конічної панелі у 2.2 рази.

3. При збільшенні параметра змінності товщини  $b_0$  суттєво підвищується ефективність конічної панелі – при  $b_0=2$  величина  $\bar{q}_{кр}^6$  для конічної панелі в 1.2 рази більше ніж для сферичної.

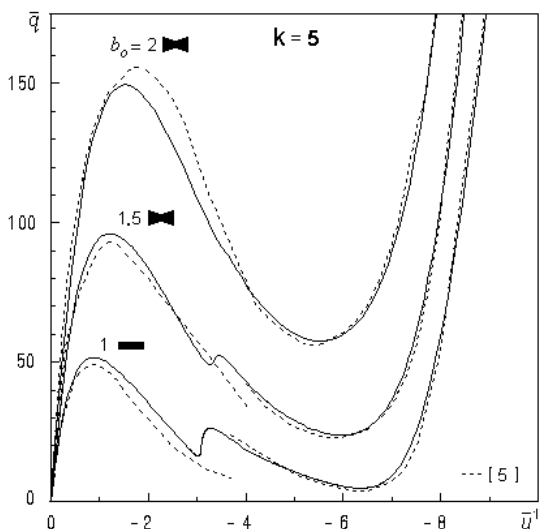


Рис. 2. Діаграми “навантаження-прогин у центрі” конічної панелі

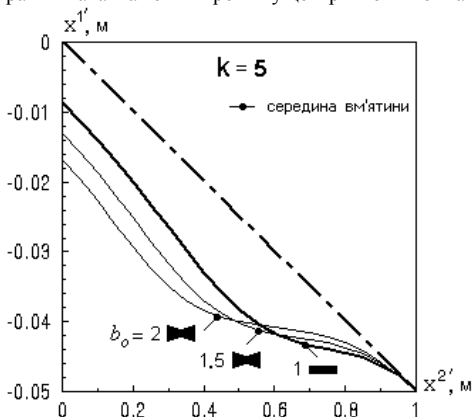


Рис. 3. Еволюція форм втрати стійкості оболонок при зміні параметра  $b_0$

Таблиця 1

Порівняння розв'язків у верхній та нижній критичних точках для конічних панелей лінійно-змінної товщини ( $k=5$ )

$b_o$		1	1.5	2
$\bar{q}_{kp}^e$	MCE	51.72	96.14	149.50
	[5]	49.0	93.0	156.0
	$\Delta, \%$	5.6	3.4	-4.2
$\bar{u}_{kp}^{I' e}$	MCE	-0.875	-1.225	-1.541
	[5]	-0.940	-1.125	-1.750
	$\Delta, \%$	-6.9	8.9	-11.9
$\bar{q}_{kp}^H$	MCE	4.86	23.86	57.61
	[5]	4.6	23.2	55.1
	$\Delta, \%$	5.7	2.8	4.6
$\bar{u}_{kp}^{I' H}$	MCE	-6.353	-5.969	-5.547
	[5]	-6.37	-5.80	-5.25
	$\Delta, \%$	-0.3	2.9	-5.7

Таблиця 2

Порівняння об'ємів  $V$  і  $\bar{q}_{kp}^e$  для сферичних і конічних панелей лінійно-змінної товщини ( $k=5$ )

$b_o$	Форма панелі				Порівняння	
	сферична [1]		конічна		$\Delta(V),$ %	$\Delta(\bar{q}_{kp}^e),$ %
	$V, \text{ м}^3 \cdot 10^6$	$\bar{q}_{kp}^e$	$V, \text{ м}^3 \cdot 10^6$	$\bar{q}_{kp}^e$		
1.0	31461.88	115.3	31422.84	51.72	-0.12	-55.1
1.5	41954.40	102.1	41895.80	96.14	-0.14	-5.8
2.0	52446.96	126.2	52368.76	149.50	-0.15	18.4

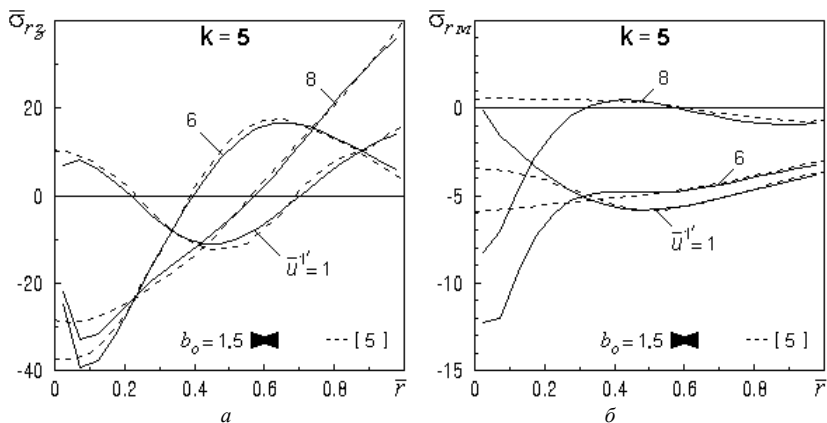


Рис. 4. Розподіл згинних і мембранних напружень у різні моменти деформування.

1. Соловей М.О., Кривенко О.П. Аналіз стійкості гладких лінійно-змінної та гранованих ступінчато-змінної товщини пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2003 р. - Вип. 72. - С. 83-96.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. - Киев: Наук. думка, 1981. - 544 с. (Методы расчета оболочек. Т. 4.).
3. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк В.А. Устойчивость нелинейных механических систем. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982. - 255 с.
4. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. - М.: Машиностроение. - 1976. - 278 с.
5. Кантор Б.Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек - Киев: Наукова думка, 1971. - 136 с.
6. Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П. Нелінійні рівняння деформування тонких багатопарових оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА, 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
7. Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П. Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
8. Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П. Нелинейные уравнения МКЭ в задачах устойчивости неоднородных оболочек // Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Доклады XVII Международной конференции. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. С. 40-44.
9. Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П. Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // Авиационно-космическая техника и технология. - 2004. - N 2 (10). - С. 18-25.
10. Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П. Вплив змінної товщини на стійкість пологих панелей при дії рівномірного тиску // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Збірник наукових праць. - Випуск 4(27).- Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2003. - С. 15-20.

Надійшло до редакції 05.12.2006 р.

УДК 539.413+622.243

Гайдайчук В.В., д-р техн. наук,  
Худолій С.М., канд. техн. наук,  
Гловач Л.В.

## ТЕОРЕТИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ СИЛ ОПОРУ, ЩО ДІЮТЬ НА КРИВОЛІНІЙНІ БУРИЛЬНІ КОЛОНИ

**Вступ.** Останнім часом питання оптимізації технології буріння криволінійних нафтових та газових свердловин стають особливо актуальними [1-4]. Поставимо задачу про визначення статичних внутрішніх і зовнішніх сил, що виникають у криволінійній бурильній колоні (БК) на різних етапах її функціонування. Оскільки у вихідному стані колона має прямолінійну форму, а в кінцевому стані обрис її пружної лінії здобуває форму істотно нелінійної кривої, для опису її напружено-деформованого стану будемо застосовувати теорію гнучких криволінійних стрижнів. При цьому будемо вважати, що завдяки малості діаметра труби колони в порівнянні з радіусом кривизни її осьової лінії, її матеріал працює в пружній стадії. Тому при постановці задачі згинання бурильних колон справедливе лінійне формулювання закону Гука.

Основи теорії гнучких криволінійних стрижнів представлені в роботах [5-7]. Методика дослідження нелінійного згинання БК, що викладається нижче, базується на основних співвідношеннях робіт [5, 8, 9], пов'язаних із застосуванням системи направляючих косинусів для опису кінематики згинання. Незважаючи на надмірність цієї системи, вона виявляється дуже зручною при постановці граничних умов та рішенні прямих і зворотніх задач механіки стрижнів.

**Постановка задачі.** Для опису згинання криволінійного стрижня використовуємо нерухому систему координат  $Oxyz$  з ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , вісь  $Oz$  якої спрямована вертикально вниз, і координату  $s$ , вимірювану довжиною осьової лінії між початковою і поточною точками. Введемо також природний тригранник Френе пружної лінії стрижня з одиничними векторами головної нормалі  $\vec{n}$ , бінормалі  $\vec{b}$  і дотичної  $\vec{\tau}$ , а також рухому систему осей  $(u, v, w)$ , осі  $u, v$  якої збігаються з головними центральними осями інерції площі поперечного перерізу, а вісь  $w$  спрямована вздовж орта  $\vec{\tau}$ .

Виписемо основні співвідношення механіки гнучких стрижнів [5,8,9]. Рівняння рівноваги зовнішніх і внутрішніх сил ( $\vec{f}, \vec{F}$ ), а також моментів ( $\vec{m}, \vec{M}$ ), прикладених до елемента стрижня, мають вигляд

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\vec{\omega}_\chi \times \vec{F} - \vec{f}, \quad \frac{d\vec{M}}{ds} = -\vec{\omega}_\chi \times \vec{M} - \vec{\tau} \times \vec{F} - \vec{m}. \quad (1)$$

Тут  $\vec{\omega}_\chi$  – вектор Дарбу, обумовлений рівністю

$$\vec{\omega}_\chi = \frac{1}{R} \vec{b} + \left( \frac{1}{T} + \frac{d\chi}{ds} \right) \vec{\tau}.$$

Величини  $R$  і  $T$ , які входять в дану формулу, являють собою відповідно радіуси кривини і кручення,  $\chi$  – кут між ортом  $\vec{n}$  і віссю  $u$ .

Відзначимо, що в теорії пружних стрижнів звичайно не враховується вплив розподілених моментів  $\vec{m}$ . Тому далі будемо вважати  $\vec{m} = 0$ .

Позначимо проекції векторів  $\vec{F}$  і  $\vec{M}$  на осі  $u, v, w$  відповідно  $F_u, F_v, F_w, M_u, M_v, M_w$ . Тут  $F_u, F_v$  – перерізаючі сили;  $F_w$  – поздовжня сила;  $M_u, M_v$  – згинальні моменти;  $M_w$  – крутний момент. Проекції вектора  $\vec{f}$  на відповідні осі рівні  $f_u, f_v, f_w$ . Вони визначаються силами ваги, силами контактної взаємодії і силами тертя між трубою БК і стінкою свердловини.

З огляду на те, що осі ( $u, v, w$ ) є головними осями вигину і крутіння елемента стрижня, проекції  $M_u, M_v, M_w$  моменту  $\vec{M}$  на ці осі виразимо у формі закону Гука

$$M_u = A(p-p_o), \quad M_v = B(q-q_o), \quad M_w = C(r-r_o) \quad (2)$$

$$A = E I_w, \quad B = E I_v, \quad C = G I_w.$$

Тут  $p, q, r$  – функції кривизни і кручення стрижня в деформованому стані;  $p_o, q_o, r_o$  – ці ж функції у вихідному недеформованому стані;  $A, B, C$  – жорсткості при вигинанні і крученні;  $E, G$  – модуль пружності і модуль зсуву матеріалу стрижня;  $I_u, I_v$  – моменти інерції поперечного перерізу стрижня;  $I_w$  – полярний момент інерції.

Після відповідних проектувань на осі  $u, v, w$  рівняння (1) приводяться до трьох скалярних рівнянь силової групи

$$dF_u/ds = rF_v - qF_w - f_u,$$

$$dF_v/ds = pF_w - rF_u - f_v, \quad (3)$$

$$dF_w/ds = qF_u - pF_v - f_w$$

і трьох рівнянь моментної групи

$$\begin{aligned} A dp/ds &= A dp_o/ds - C q r + B q r + F_v, \\ B dq/ds &= B dq_o/ds - A r p + C r p - F_u, \\ C dr/ds &= C dr_o/ds - B p q + A p q. \end{aligned} \quad (4)$$

До цих рівнянь додаються рівності, що визначають компоненти направляючих косинусів [2].

Будемо вважати, що просторовий обрис осьової лінії пробуреної криволінійної свердловини відомий і він визначається радіусом-вектором  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  чи скалярними рівностями

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (5)$$

Тоді можна підрахувати радіуси кривини  $R$  і кручення  $T$  за формулами:

$$\frac{1}{R} = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}, \quad \frac{1}{T} = R^2 \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Тут штрихом позначене диференціювання по  $s$ . За допомогою (5), (6) можна знайти вектори

$$\vec{\tau} = d\vec{r}/ds, \quad \vec{n} = R d^2\vec{r}/ds^2, \quad \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}. \quad (7)$$

Оскільки бурильна колона являє собою трубчасту конструкцію, зручно так вибрати орієнтацію осей  $u, v, w$ , щоб виконувалася умова  $\chi = 0$ . У цьому випадку параметри  $p, q, r$  знаходяться за формулами

$$p = 0, \quad q = 1/R, \quad r = 1/T. \quad (8)$$

Після підрахунку величин (6) – (8) можна приступати до обчислення внутрішніх і зовнішніх сил, що діють на бурильну колону. Розглянемо випадок, коли колона не обертається і  $p_o = 0, r_o = 0, r = 0$ . Тоді за допомогою перших двох рівнянь системи (4) знаходимо

$$F_u = -B dq/ds + B dq_o/ds, \quad F_v = 0 \quad (9)$$

Для визначення чотирьох невідомих функцій  $F_w, f_u, f_v, f_w$ , що залишилися, будемо використовувати три рівняння (3) і додаткову умову фрикційної взаємодії труби колони і стінок свердловини. При цьому

будемо вважати, що зовнішні сили  $f_u, f_v, f_w$  складаються із сил гравітації  $f_u^{2p}, f_v^{2p}, f_w^{2p}$ , сил нормальної взаємодії  $f_u^H, f_v^H$  і сил тертя  $f_w^{mp}$ , тобто  $f_u = f_u^{2p} + f_u^H$ ,  $f_v = f_v^{2p} + f_v^H$ ,  $f_w = f_w^{2p} + f_w^{mp}$ .

Компоненти  $f_u^{2p}, f_v^{2p}, f_w^{2p}$  знаходяться шляхом проектування вектора інтенсивності сил ваги  $\vec{f}^{2p} = \gamma g \vec{k}$  на осі  $u, v, w$

$$f_u^{2p} = \gamma g n_z, \quad f_v^{2p} = \gamma g b_z, \quad f_w^{2p} = \gamma g \tau_z.$$

Тут  $\gamma$  - погонна щільність труби,  $g$  - прискорення вільного падіння.

Тоді з рівнянь (3) знаходимо

$$\begin{aligned} qF_w + f_u^H &= B d^2 q / ds^2 - B d^2 q_o / ds^2 - \gamma g n_z, \quad f_v^H = -\gamma g b_z \\ dF_w / ds + f_w^{mp} &= B q dq_o / ds - B q dq / ds - \gamma g \tau_z. \end{aligned} \quad (10)$$

До цих рівнянь додаємо умову фрикційної взаємодії між колоною і стінкою свердловини. У загальному випадку, у стані рівноваги труби усередині каналу свердловини ця задача є статично невизначуваною і має безліч рішень. Тому будемо розглядати критичні випадки граничної рівноваги, коли колона починає рухатися вниз під дією сил ваги або починає підніматися під дією вертикальної сили на верхньому кінці. Тоді розподілена сила тертя  $f_w^{mp}$  в кожній точці контакту визначається повною силою нормального тиску  $\sqrt{(f_u^H)^2 + (f_v^H)^2}$  і коефіцієнтом тертя  $\lambda$ :

$$f_w^{mp} = \pm \lambda \cdot \sqrt{(f_u^H)^2 + (f_v^H)^2}. \quad (11)$$

Тут знак плюс відповідає підйому бурильної колони, а знак мінус – її опусканню.

Система чотирьох рівнянь (10), (11) може бути використана для знаходження чотирьох невідомих  $F_w, f_u^H, f_v^H, f_w^{mp}$ . Вона є нелінійною і відноситься до системи гібридного типу, оскільки включає алгебраїчні рівняння і звичайне диференціальне рівняння. Її рішення може бути знайдено чисельними методами.

Задача ідентифікації сил, що діють на криволінійну бурильну колону, істотно спрощується, якщо її осьова лінія є плоскою кривою, що лежить у площині  $Oxz$ . Тоді

$$f_v^n = 0, \quad f_v^{mp} = 0, \quad f_w^{mp} = \mp \lambda \left| q_o F_w - q F_w - B \frac{d^2 q_o}{ds^2} + B \frac{d^2 q}{ds^2} - \gamma g n_z \right| \quad (12)$$

і система (10), (11) зводиться до одного звичайного диференціального рівняння першого порядку відносно шуканої функції  $F_w$

$$\begin{aligned} \frac{dF_w}{ds} = \mp \lambda \left| q_o F_w - q F_w - B \frac{d^2 q_o}{ds^2} + B \frac{d^2 q}{ds^2} - \gamma g n_z \right| + \\ + B q_o \frac{dq_o}{ds} - B q \frac{dq}{ds} - \gamma g \tau_z. \end{aligned} \quad (13)$$

Наявність операції обчислення модуля від доданків у правій частині цього рівняння робить його нелінійним. На ділянках зміни  $s$ , що відповідають знакосталим значенням виразу всередині знаку модуля, воно є лінійним і для конкретних функцій  $q$ ,  $n_z$ ,  $\tau_z$  може бути отримане його рішення в замкнутій формі. Потім за допомогою методу припасовування можна побудувати і його часткове рішення при заданих граничних умовах. Однак такий підхід є досить трудомістким. У зв'язку з цим будемо інтегрувати рівняння (12) методом Рунге – Кутта.

**Властивості сил опору, що діють на криволінійну бурильну колону.** Вирази для сил у рівняннях (12), (13) дозволяють встановити найбільш важливі фактори, що впливають на формування сил опору при підйомі і опусканні бурильної колони.

1. Оскільки напрямок сил тертя  $f_w^{mp}$  має різну орієнтацію при опусканні і підйомі бурильної колони, вони по-різному взаємодіють із силами ваги. Так, на ділянці збільшення глибини БК сили тертя складаються із силами ваги при підйомі БК і віднімаються при опусканні. Тому підйом бурильної колони пов'язаний з прикладанням більшої сили на її верхньому кінці, ніж спуск.

2. Сили тертя залежать від згинної жорсткості  $B$  труби бурильної колони. Зі збільшенням  $B$  ці сили ростуть. Вони збільшуються також у місцях швидкої зміни жорсткості  $B$ . Ці ефекти виникають у місцях різьбових з'єднань труб бурильної колони і у місцях з'єднань труб різних діаметрів.

3. Сили тертя залежать від початкового прогину  $q_o$  бурильної колони і зі збільшенням  $q_o$  вони ростуть.

4. Сили тертя різко зростають у місцях швидкої зміни початкового прогину ( $d^2 q_o / ds^2$ ).

5. Сили тертя зростають у місцях зменшення радіуса кривини свердловини і у місцях швидкої зміни її кривини (у точках зламу її траєкторії).

6. Сили тертя зростають за рахунок крайових ефектів виникнення згинаючого моменту і пари перерізуючих сил на кінці бурильної колони. Значення цих сил (і сил тертя) швидко зростають зі збільшенням згинної жорсткості  $B$  труби бурильної колони при наближенні її діаметра до діаметра свердловини. При збільшенні діаметра свердловини відносно діаметра бурильної колони і при зменшенні  $B$  ці сили падають.

7. Сили тертя збільшуються на ділянках траєкторії свердловини, що наближаються до горизонтального (при  $n_z \rightarrow 1$ ).

Перераховані фактори повинні бути враховані при проектуванні траєкторії свердловини.

**Розрахунок бурильної колони кругового обрису.** Розглянемо найпростіший випадок, коли осьова лінія свердловини являє собою дугу кола радіуса  $R$  (рис.1).

Її рівняння мають вид [5]

$$x = R(1 - \cos \frac{s}{R}), \quad y = 0, \quad z = R \sin \frac{s}{R}.$$

За допомогою формул (6) – (8) знаходимо

$$\begin{aligned} \tau_x &= \sin \frac{s}{R}, & \tau_z &= \cos \frac{s}{R}, & n_x &= \cos \frac{s}{R}, \\ n_z &= -\sin \frac{s}{R}, & p &= 0, & q &= \frac{1}{R}, & r &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

З урахуванням цих рівностей система рівнянь (10), (11) приводиться до виду

$$\begin{aligned} \frac{dF_w}{ds} &= \mp \lambda \left| -\frac{1}{R} F_w + \gamma g \sin \frac{s}{R} \right| - \gamma g \cos \frac{s}{R}, \\ f_u^H &= -\frac{1}{R} F_w + \gamma g \sin \frac{s}{R}, \quad f_w^{mp} = \pm \lambda \left| -\frac{1}{R} F_w + \gamma g \sin \frac{s}{R} \right|. \end{aligned} \quad (15)$$

При її чисельному рішенні з початковою умовою  $F_w(0) = F_{w,0}$  спочатку методом Рунге – Кутта інтегрується перше рівняння і знаходиться функція  $F_w(s)$  ( $0 \leq s \leq S$ ), потім за допомогою другої і третьої рівностей обчислюються функції  $f_u^H$  та  $f_w^{mp}$ .

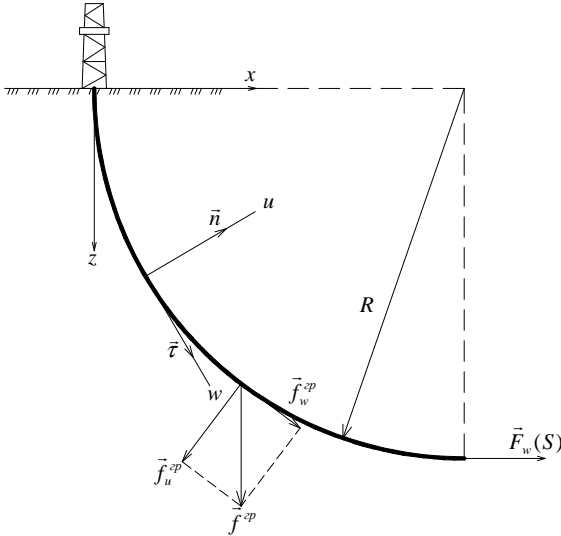


Рис.1. Розрахункова схема криволінійної бурильної колони

Розрахунки виконувалися при наступних значеннях визначальних величин:  $R = 3000\text{м}$ ;  $g = 9,81\text{м/с}^2$ ;  $\gamma = \pi (d_1^2 - d_2^2) \rho / 4$ ;  $d_1 = 0,1683\text{ м}$ ;  $d_2 = 0,1483\text{ м}$ ;  $\rho = 7,8\text{ кг/м}^3$ ;  $\lambda = 0,1$ ;  $0,15$ ;  $S = \pi R/2$ .

Сила ваги  $G$  усієї бурильної колони при обраних значеннях параметрів складає  $G = 1793,2\text{ Н}$ .

На рис. 2 показані графіки зміни внутрішньої повздожньої сили  $F_w(s)$  в області  $0 \leq s \leq S$ . Криві 1, 2, 3, 4, що виходять зі значень  $F_w(0) = 0,9G$ ;  $0,8G$ ;  $0,7G$ ;  $0,6G$  на осі ординат, розташовуються парами. Тонкі криві кожної з цих пар відповідають значенню коефіцієнта тертя  $\lambda = 0,15$ , а товсті – значенню  $\lambda = 0,1$ .

По знайдених значеннях  $F_w(s)$  за допомогою другої рівності системи (15) підраховувалися функції  $f_u^H$  нормального тиску стінки свердловини на трубу бурильної колони. Оскільки в зонах їх максимальних значень досягаються найбільші значення сил тертя  $f_w^{mp}$  й у першу чергу реалізуються негативні ефекти, пов'язані з прихватом труби  $f_u^H(s)$ , визначення цих зон є важливою задачею. Її рішення може бути використане для розробки заходів щодо оптимізації процесу буріння.

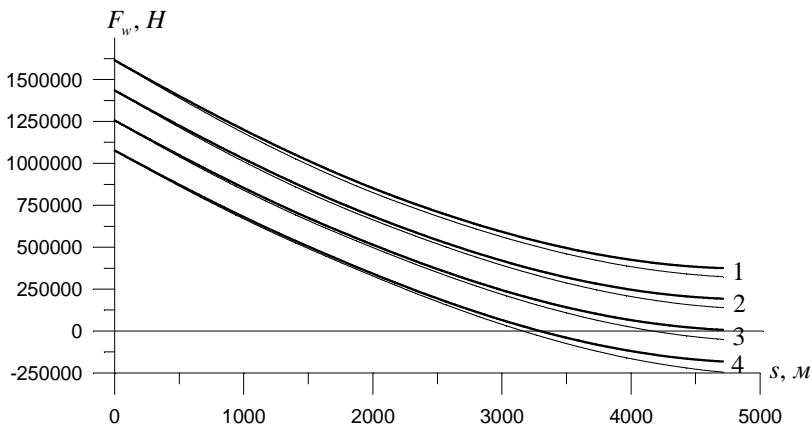


Рис.2. Графіки зміни внутрішньої розтягуючої повздовжньої сили  $F_w$  в залежності від координати  $s$ : —  $\lambda=0,1$ ; —  $\lambda=0,15$ .

Графіки функцій  $f_u^H(s)$  для розглянутої моделі показані на рис. 3. Їх нумерація відповідає порядку слідування кривих на рис. 2. Можна помітити, що найбільші значення сил  $f_u^H(s)$  контактного тиску для бурильної колони обраної геометрії мають місце на її кінцях. У верхній частині свердловини  $f_u^H < 0$ , тому труба тисне на стінку свердловини в напрямку нормалі  $\vec{n}$ ; у нижній частині свердловини напрямок тиску змінюється на протилежний.

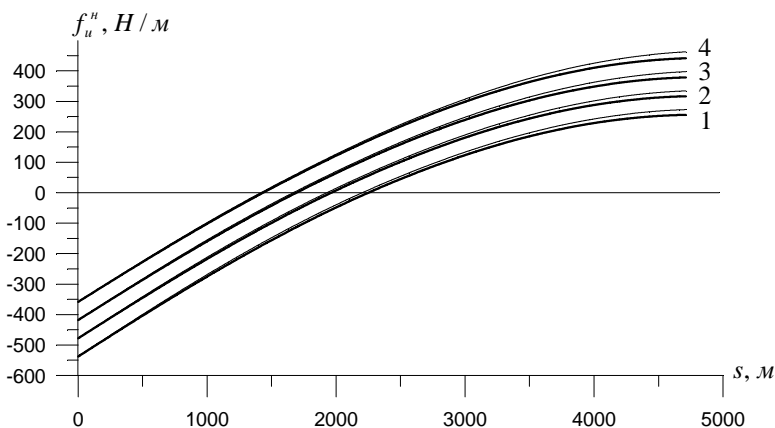


Рис.3. Графіки зміни інтенсивності зовнішніх сил нормального тиску  $f_u^H(s)$ : —  $\lambda=0,1$ ; —  $\lambda=0,15$

Рис. 4 ілюструє характер зміни сил тертя  $f_w^{mp}$  між трубою бурильної колони і стінкою свердловини. При підйомі бурильної колони вони діють на трубу вздовж додатного напрямку осі  $w$ .

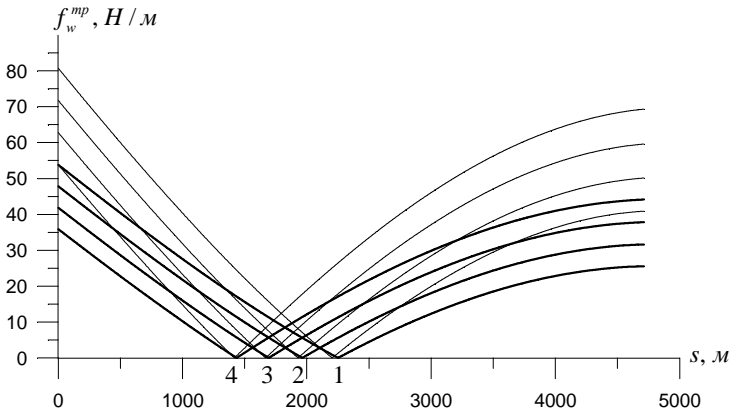


Рис.4. Графіки розподілення сили тертя  $f_w^{mp}(s)$  по довжині колони:

—  $\lambda = 0,1$ ; —  $\lambda = 0,15$ .

Таким чином, запропонована методика ідентифікації внутрішніх і зовнішніх сил діючих на криволінійну бурильну колону дозволяє оптимізувати проектну геометрію свердловини і технологію її проходження, а також уникати позаштатних ситуацій в процесі буріння.

1. Мислюк М.А., Рибич І.Й., Яремчук Р.С. Буріння свердловин. Т.3, Вертикальне та скероване буріння.-Київ: "Інтерпрес ЛТД", 2004. - 294с .
2. Akgun F. "A finite element model for analyzing horizontal well BHA behavior"// Journal of Petroleum Science and Engineering. - 2004.- V.42, №2-4, p. 121-132.
3. Jonggeun Choe, Jerome J.Schubert, Hans C. Juvkam-Wold. "Well-control analyses on extended-reach and multilateral trajectories"// SPE Drilling & Completion. – 2005. – June, p. 101-108.
4. Sawaryn, S.J., Thorogood J.L. "A compendium of directional calculations based on the minimum curvature method"// SPE Drilling & Completion, 2005, March, - p. 24-36.
5. Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наукова думка, 1992. – 344 с.
6. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. - Москва: ОГИЗ, 1948. – 178 с.
7. Светлицкий В.А. Механика стержней. - Москва: Высшая школа; ч.1, 1987. – 320 с.; ч.2, 1987. – 304 с.
8. Gulyayev V.I., Tolbatov E.Yu. Forced and self-excited vibrations of pipes containing mobile boiling fluid clots // Yournal of Sound and Vibration.-2002.-257. p.425 - 437.
9. Gulyayev V.I., Tolbatov E.Yu. Dynamics of spiral tubes containing internal moving masses of boiling liquid // Yournal of Sound and Vibration.- 2004.-274. p.233 - 248.

Надійшло до редакції 09.10.2006 р.

УДК 539.3

**Вабішевич М.О.****Сахаров О.С.**, д-р техн. наук**Солодей І.І.**, канд. техн. наук

## **ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ ПРИ ДІЇ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Здійснено узагальнення методики обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень прямим методом для просторових призматичних тіл на основі напіваналітичного методу скінченних елементів при дії імпульсного навантаження.

**Вступ.** Значна кількість конструктивних елементів, являє собою неоднорідні призматичні тіла складної форми. До них відносяться різноманітні вузли та деталі енергетичного і транспортного машинобудування, а також зразки для визначення механічних характеристик матеріалів і т.і. Внаслідок експлуатаційних та технологічних умов зазначені об'єкти можуть мати певні пошкодження, типу тріщин. Нерідко такі об'єкти знаходяться під дією довільно орієнтованих у просторі та у часі динамічних навантажень, головною рисою яких є мікросекундні діапазони протікання. Дослідження напружено-деформованого стану таких конструкцій веде до необхідності розв'язання складних просторових задач динаміки для навантажених імпульсними силовими полями неоднорідних призматичних тіл складної форми та структури, при наявності у них тріщин.

Для аналізу подібного класа об'єктів найбільш раціональним є застосування напіваналітичного методу скінченних елементів, як це показано при розв'язанні лінійних задач механіки руйнування в роботах [1, 2]. Однак, в зазначених публікаціях розглядаються виключно задачі статики. Тому розробка ефективних засобів розрахунку вказаних конструкцій, при динамічних навантаженнях є актуальною проблемою.

Метою роботи є створення на основі напіваналітичного методу скінченних елементів ефективної методики визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами при дії імпульсного навантаження

**1. Постановка задачі.** Розглядаються в базисній Декартові системі координат  $Z^i$  неоднорідні призматичні тіла з тріщинами, що знаходяться під дією довільного імпульсного навантаження або зміщень, на інтервалі часу  $T \in [t_0, t_1]$  (рис.1).

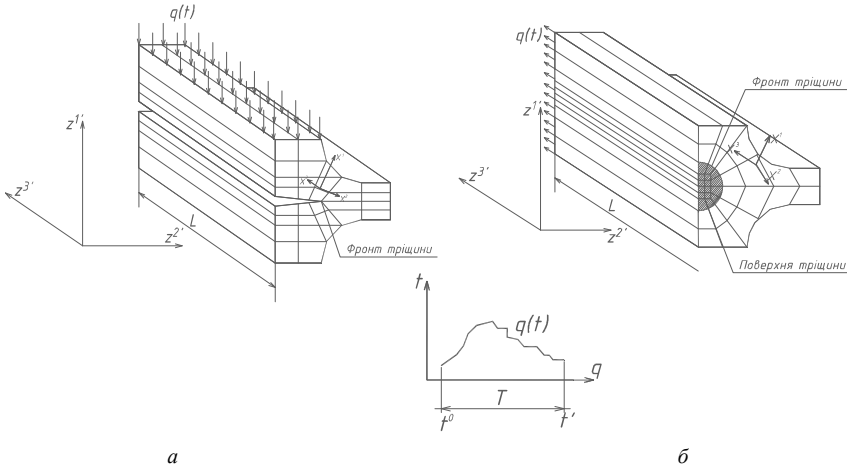


Рис. 1

Вісі  $z^1$ ,  $z^2$  лежать в площині поперечного перерізу тіла, вісь  $z^3$  спрямована вздовж утворюючої.

Для призматичних тіл виділяють два типи тріщин: поздовжні (рис.1,а), фронт яких збігається за напрямком з віссю  $z^3$ ; поперечні (рис.1,б), фронт яких розташований в площині поперечного перерізу тіла і є ортогональним до вісі  $z^3$

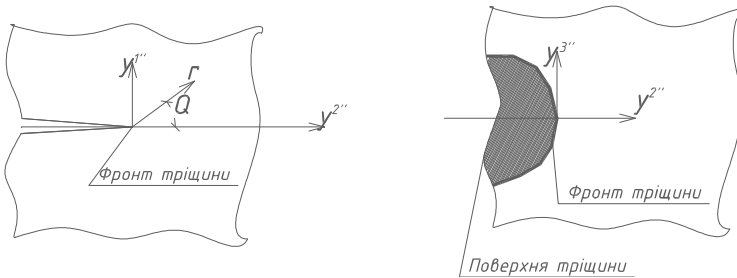


Рис. 2

Для опису НДС в околі вершини тріщини застосовується система координат  $u^i$ , пов'язана з фронтом тріщини, таким чином, щоб вісь  $u^1$  співпадала з нормаллю до поверхні тріщини,  $u^2$  орієнтована по нормалі до фронту тріщини, а  $u^3$  була спрямована вздовж дотичної до фронту. Сингулярне поле напружень поблизу вершини тріщини в системі координат  $u^i$  в усіх точках її фронту буде характеризуватися

коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН). Конкретизація виразів, що описують взаємозв'язок напружень і переміщень з величиною КІН залежить від типу розкриття тріщини [2].

Для тріщин нормального відриву (тип I):

$$\begin{aligned}\sigma^{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma^{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma^{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ u_1 &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}), \\ u_2 &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}).\end{aligned}\quad (1)$$

Для тріщин поперечного зсуву (тип II):

$$\begin{aligned}\sigma^{11} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma^{12} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma^{22} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right), \\ u_1 &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}), \\ u_2 &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2}).\end{aligned}\quad (2)$$

Для тріщин поздовжнього зсуву (тип III):

$$\sigma^{13} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \sigma^{23} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad u_3 = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (3)$$

де  $r, \theta$  – полярні координати з початком в вершині тріщини (рис. 2);  $\mu$  – модуль зсуву;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора

перетворення  $z_{,j}^{i'}$ , що обумовлює зв'язок між місцевою та базисною системами координат [4]:

$$z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}, \quad z_{,3}^{\alpha'} = z_{,\alpha}^{3'} = 0; \quad z_{,3}^{3'} = \frac{L}{2}. \quad (4)$$

де  $L$  – довжина тіла в напрямку  $z^{3'}$ .

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

Компоненти метричного тензора  $g_{mn}$  в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma'} z_{,\beta}^{\gamma'}, \quad g_{33} = (z_{,3}^{3'})^2. \quad (5)$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій  $\varepsilon_{ij}$  через переміщення  $u_i$  в місцевій системі координат [4]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (6)$$

де  $\Gamma_{ij}^k$  – символи Кристофеля другого роду.

Подамо переміщення в місцевій системі координат через їх значення в базисній:

$$u_k = u_{s'} z_{,k}^{s'}, \quad (7)$$

Оскільки в декартовій базисній системі координат всі символи Кристофеля дорівнюють нулю, то:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (u_{1',\alpha} z_{,\beta}^{1'} + u_{1',\beta} z_{,\alpha}^{1'}); \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} (u_{1',\alpha} z_{,3}^{1'} + u_{1',3} z_{,\alpha}^{1'}); \\ \varepsilon_{33} &= u_{1',3} z_{,3}^{1'}. \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (9)$$

В ізотропному тілі компоненти тензора пружних сталих  $d^{ijkl}$  пов'язані з коефіцієнтами Ламе  $\lambda$  і  $\mu$  співвідношеннями [2]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}), \quad (10)$$

де  $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ ;  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ;  $E = E(z^{i'})$ ,  $\nu = \nu(z^{i'})$  - значення модуля пружності і коефіцієнта Пуассона в точці тіла, що розглядається.

Фізичні компоненти тензорів деформацій  $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ , напружень  $\tilde{\sigma}^{ij}$  та пружних констант  $\tilde{d}^{ijkl}$  визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{kl} &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}, \\ \tilde{\sigma}^{ij} &= \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}, \\ \tilde{d}^{ijkl} &= d^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рівновага тіла при наявності інерційних сил, описується рівнянням, покомпонентна форма якого в криволінійній системі координат приймає вигляд [2]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} z_{,k}^{j'} \sigma^{ki} \right) + f^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'}. \quad (12)$$

Однозначність розв'язання (12) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу  $t_0$ , який приймається за початок часової координати:

$$u(z^{i'}, t_0) = u_0(z^{i'}), \quad \dot{u}(z^{i'}, t_0) = \dot{u}_0(z^{i'}), \quad z^{i'} \in V. \quad (13)$$

При цьому припускається, що на частині поверхні  $S_u$  задані кінематичні граничні умови:

$$u(z^{i'}, t) = \tilde{u}(z^{i'}, t), \quad z^{i'} \in S_u, \quad (14)$$

а на поверхні  $S_p$  з нормаллю  $\vec{n} = n_j e^j$  - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z_i^{k'} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}(z^{k'}, t), \quad z^{k'} \in S_p. \quad (15)$$

В кожний момент часу пружно-деформований стан згаданого тіла повинен задовольняти варіаційному рівнянню руху яке, згідно принципам Лагранжа-Даламбера, подамо у вигляді:

$$\int_V \rho \ddot{u}^i \delta u_i dV + \int_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V f^i \delta u_i dV - \int_{S_p} p^i \delta u_i dS = 0, \quad (16)$$

де  $\tilde{\sigma}^{ij}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  - фізичні компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно.

**2. Особливості дискретизації призматичних тіл з тріщинами на основі НМСЕ** Для апроксимації просторових неоднорідних призматичних тіл використовуються просторові неоднорідні призматичні скінченні елементи, що являють собою призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді прямої.

Кожному скінченному елементу (СЕ) поставлена у відповідність місцева система координат  $x^i$ , яка природньо пов'язана з геометрією об'єкта, так що осі  $x^1$  і  $x^2$  спрямовані вздовж сторін поперечного перетину скінченного елемента, а  $x^3$  спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із  $z^3$ . При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одичиною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2 (рис.3). Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ.

Будемо вважати, що щільність матеріалу  $\rho$ , компоненти тензора пружних постійних і  $C^{ijkl}$  визначник метричного тензора  $g$  незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі:

$$\rho = \rho|_{x^\alpha=0}, \quad C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}{}^{ijkl} = C^{ijkl}|_{x^\alpha=0}; \quad g = \overset{\circ}{g} = g|_{x^\alpha=0}; \quad (17)$$

В той же час  $\rho$  і  $C^{ijkl}$  довільно змінюються вздовж осі  $x^3$  і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування

За невідомі при розв'язанні задачі приймаються компоненти переміщень, швидкостей та прискорень вузлів СЕ в базисній системі координат  $(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'}$ , де  $k'$  - напрямок в базисній системі координат.

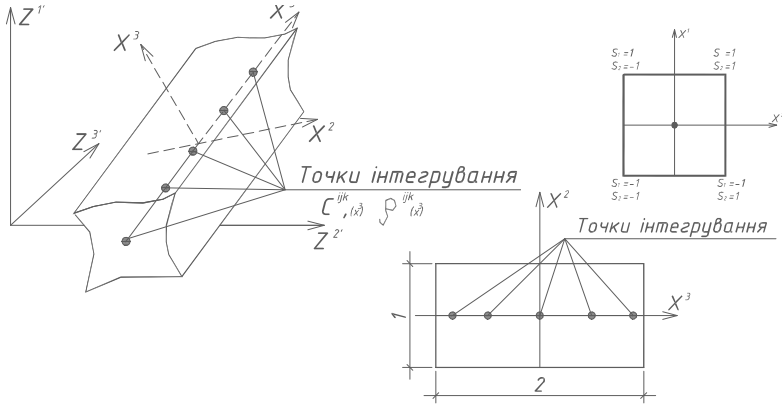


Рис.3

В той же час  $\rho$  і  $C^{ijkl}$  довільно змінюються вздовж осі  $x^3$  і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування

За невідомі при розв'язанні задачі приймаються компоненти переміщень, швидкостей та прискорень вузлів СЕ в базисній системі координат  $(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'}$ , де  $k'$  - напрямок в базисній системі координат.

Якщо обмежитися білінійним розподілом переміщень, швидкостей і прискорень в площині перетину елемента і описати їх через вузлові значення поліномами Лагранжа першого ступеня:

$$P_{(S_1, S_2)} = \prod_{n=1}^2 \left( S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right) = \left( S_1 x^1 + \frac{1}{2} \right) \left( S_2 x^2 + \frac{1}{2} \right) =, \quad (18)$$

$$= S_1 x^1 S_2 x^2 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{4}$$

можна записати:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} P_{(S_1, S_2)} (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}. \quad (19)$$

Індекси  $S_1$  та  $S_2$  визначають положення вузла відносно центру поперечного перерізу елемента і набувають значень  $\pm 1$  (рис.3).

В центрі поперечного перерізу СЕ переміщення, швидкості, прискорення і їх похідні виражаються формулами:

$$\begin{aligned} (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'} \Big|_{x^\alpha=0} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}, \\ (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k', \beta} \Big|_{x^\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} S_\beta, \\ (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k', 12} \Big|_{x^\alpha=0} &= \sum_{S_1} \sum_{S_2} (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} S_1 S_2. \end{aligned} \quad (20)$$

В напрямку утворюючої переміщення, та їх похідні по напрямку  $x^3$  апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій  $\varphi^{(l)}$  – поліномам Лагранжа ( $l=0,1$ ) і Міхліна ( $l=2, \dots, L$ ):

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L u_{m'}^l \varphi^{(l)}; \quad u_{m',3} = \sum_{l=0}^L u_{m',3}^l \varphi^{(l)}; \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3), \\ \varphi^{(l)} &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[ (1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Скінченні елементи, що пропонуються, орієнтовані на розрахунок широкого класу неоднорідних призматичних тіл. Вони повинні забезпечувати не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного рішення.

Подамо компоненти тензору повних фізичних деформацій в поперечних перетинах, що відповідають точкам інтегрування, у відповідності до моментної схеми скінченних елементів (ММСЕ) відрізками ряду Маклорена [4]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{12} = \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{12}, \\ \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{33} = \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33} + \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33, \beta} x^\beta, \end{aligned} \quad (23)$$

де

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

Подаючи коефіцієнти розкладу напружень через коефіцієнти розкладу деформацій згідно закону Гука, отримаємо:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33}_{,\alpha} x^\alpha, \end{aligned} \quad (24)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена через напруження місцевій системі координат (9):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} &= g^{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}; & \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} &= g^{12} \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} &= \sqrt{g^{\alpha(\alpha)} g^{33}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}; & \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} &= g^{33} \overset{\circ}{\sigma}^{33}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} &= g^{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}; & \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} &= \sqrt{g^{\alpha(\alpha)} g^{33}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33}_{,\alpha} &= g^{33} \overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,\alpha}. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена, отримані з урахуванням (11), матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g^{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}^{\alpha(\alpha)}; & \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{12} &= \frac{1}{\sqrt{g^{11} g^{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}^{12}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha(\alpha)} g^{33}}} \overset{\circ}{\varepsilon}^{\alpha 3}; & \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{33} &= \frac{1}{g^{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}^{33}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{1}{g^{\alpha(\alpha)}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}^{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}^{\alpha(\alpha)} h^{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right); \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha(\alpha)} g^{33}}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}^{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}^{\alpha 3} h^{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33,\beta} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33,\beta},$$

**3.Визначення компонентів матриць жорсткості.** Варіація потенційної енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\mathcal{E}}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (27)$$

Подаючи фізичні компоненти тензору напружень і тензору деформацій згідно (25) та (26) і виконавши інтегрування по  $x^1$  та  $x^2$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[ \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{ij} + \frac{1}{12} \left( \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta \left( \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} \delta \left( \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{,33} \delta \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3, \quad (28) \end{aligned}$$

або, у матричній формі:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\mathcal{E}} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[ \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{,1} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{,2} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{g} dx^3, \quad (29)$$

Коефіцієнти розкладення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\mathcal{E}} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{,\alpha} \right\}, \quad (30)$$

З урахуванням цього вираз (29) набуває вигляду:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\mathcal{E}} \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\mathcal{E}} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{,\alpha} \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{,\alpha} \right\} \right) \right\} \sqrt{g} dx^3 \quad (31)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами (19), подамо вираз варіації енергії SE у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L (\delta \{u\}_l^T) [K]_{ln} \{u\}_n, \quad (32)$$

де  $[K]_{ln}$  – матриця жорсткості неоднорідного косокутного призматичного SE:

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком  $x^3$  для матриці жорсткості SE отримаємо наступний вираз[4]

$$\begin{aligned} [K]_{ln} = & \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T [D]_{00}^{ln} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T [D]_{30}^{ln} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T [D]_{03}^{ln} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix} + \right. \\ & + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T [D]_{33}^{ln} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{00\alpha}^{ln} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix} + \right. \\ & + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{30\alpha}^{ln} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{03\alpha}^{ln} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix} + \\ & \left. + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{33\alpha}^{ln} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix} \right) \Bigg\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (33) \end{aligned}$$

**4. Визначення компонент матриці мас.** Варіація кінетичної енергії в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta K^e = - \int_{x^3} \overset{\circ}{\rho} \ddot{u}_m^{m'} \delta u_m^{m'} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (34)$$

Виразивши переміщення вузлів елемента вздовж утворюючої на основі поліномів (21), та використавши припущення про осереднення маси біля вузла, що розглядається, враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає частині мас елементів, які примикають до даного вузла, перепишемо варіацію кінетичної енергії у вигляді:

$$\delta K^e = - \sum_{l=l_0}^L \sum_{n=n_0}^L \ddot{u}_m^n \int_{x^3} \overset{\circ}{\rho} \varphi^{(l)} \varphi^{(n)} dx^3 \overset{\circ}{g}^{m'm'} \sqrt{\overset{\circ}{g}} \delta u_m^l, \quad (35)$$

або в матричній формі

$$\delta K^e = - \sum_{l=l_0}^L \sum_{n=n_0}^L (\delta \{u\}_l^T) [M]_{ln} \{\ddot{u}\}_n, \quad (36)$$

де  $[M]_{ln}$  - амплітудна матриця мас неоднорідного вздовж  $x^3$  скінченного елемента, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$m_{ln}^{m'} = \frac{1}{4} \sqrt{g^{\circ} g^{\circ} m' m' \rho_{ln}^{\circ}}, \quad (37)$$

тут введені наступні позначення:

$$\rho_{ln}^{\circ} = \int_{x^3} \rho^{\circ} \varphi^{(l)} \varphi^{(n)} dx^3 = \sum_{p=1}^P \rho_p^{\circ} \varphi_p^{(l)} \varphi_p^{(n)} H_p, \quad (38)$$

$\rho_p$  - щільність матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу, що відповідає  $p$ -ій точці інтегрування,  $H_p$  - вагова функція чисельного інтегрування.

**5. Використання методу Ньюмарка при обчисленні параметрів руйнування.** На основі отриманих формул для матриці мас та матриці жорсткості можемо записати рівняння руху в матричній формі як:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{Q\}. \quad (39)$$

Найбільш поштреним серед методів прямого інтегрування рівнянь руху у часі є метод Ньюмарка [7]:

$$\begin{aligned} \{\dot{U}\}^{t+\Delta t} &= \{\dot{U}\}^t + \left[ (1-\delta)\{\ddot{U}\}^t + \delta\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} \right] \Delta t, \\ \{U\}^{t+\Delta t} &= \{U\}^t + \{\dot{U}\}^t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{U}\}^t + \alpha \{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2, \end{aligned} \quad (40)$$

де  $\delta \geq 0.5$ ,  $\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$  - умови, які визначають стійкість схеми інтегрування, що розглядається.

Подаючи  $\{\dot{U}\}^{t+\Delta t}$  через  $\{U\}^{t+\Delta t}$ , та підставивши  $\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}$  у вираз для кінетичної енергії системи, записаний для того ж моменту часу, одержимо:

$$a_0 [M \{U\}^{t+\Delta t} + [K] \{U\}^{t+\Delta t} = \{Q\}^{t+\Delta t} + [M] \{a_0 \{U\}^t + a_2 \{\dot{U}\}^t + a_3 \{\ddot{U}\}^t\}, \quad (41)$$

або

$$[\hat{K}]^{t+\Delta t} \{U\}^{t+\Delta t} = \{\hat{Q}\}^{t+\Delta t}, \quad (42)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1. \quad (43)$$

На основі рішення (40), тобто значень амплітуд переміщень у момент часу  $t+\Delta t$ , обчислюємо амплітуди швидкостей та прискорень:

$$\begin{aligned} \{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} &= a_0 (\{U\}^{t+\Delta t} - \{U\}^t) - a_2 \{\dot{U}\}^t - a_3 \{\ddot{U}\}^t, \\ \{\dot{U}\}^{t+\Delta t} &= \{\dot{U}\}^t + a_6 \{\ddot{U}\}^t + a_7 \{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}, \end{aligned} \quad (44)$$

де  $a_6 = \Delta t(1-\delta)$ ,  $a_7 = \delta \Delta t$ .

Апроксимація конструкції вздовж направляючої майже ортогональною системою поліноміальних базисних функцій забезпечує добру обумовленість матриці  $[\hat{K}]^{t+\Delta t}$ . Найбільш економічними, з точки зору трудоемкості розв'язання отриманої системи алгебраїчних рівнянь, є блоково-ітераційні процедури. Пропонується використання методу групової релаксації, для якого блок ітераційного процесу формується в межах одного члена ряду розкладу невідомих вздовж направляючої:

$$\{U\}_{i+1}^{l,t+\Delta t} = \{U\}_i^{l,t+\Delta t} + \omega [\hat{K}]_{ll}^{-1} \left( \{\hat{Q}\}_l^{t+\Delta t} - \{\tilde{R}\}_{l,i}^{t+\Delta t} \right), \quad (45)$$

де  $\{\tilde{R}\}_{l,i}^{t+\Delta t}$  - вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації  $i$  кроку  $t+\Delta t$ :

$$\{\tilde{R}\}_{l,i}^{t+\Delta t} = \sum_{m=l_0}^{l-1} [\hat{K}]_{lm} \{U\}_{i+1}^{m,t+\Delta t} + \sum_{m=l}^L [\hat{K}]_{lm} \{U\}_i^{m,t+\Delta t}, \quad (46)$$

$\{U\}_{i+1}^{m,t+\Delta t}$ ,  $\{U\}_i^{m,t+\Delta t}$  - амплітудні значення вузлових переміщень в момент часу  $t+\Delta t$  на ітераціях  $i+1$  та  $i$  відповідно,  $\omega$  - параметр релаксації ( $1 \leq \omega < 2$ ).

Для завершення ітераційного процесу виконується нерівність:

$$\left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t} \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta U\}^{l,t+\Delta t} \right\|, \quad (47)$$

де  $\{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t}$  - приращення амплітудних переміщень на ітерації  $i$  у

момент часу  $t+\Delta t$ ,  $\{\Delta U\}^{l,t+\Delta t} = \sum_{i=1}^l \{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t}$  - вектор приращень

амплітудних переміщень у момент часу  $t+\Delta t$ ,  $\|\{\Delta U\}\| = \|\{\Delta U\}\|^2$ ,  $\varepsilon$  - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

Оскільки при розв'язку задач динаміки визначення КІН прямим методом виконується на основі обчислених значень параметрів пружно-деформованого стану, які змінюються в часі, то його величина теж буде функцією  $t$ . Для кожного значення  $t$  обчислення КІН базується на методиці, докладне викладення і опис реалізації якої при застосуванні МСЕ для призматичних тіл описані в [3].

В просторових тілах визначення КІН проводиться в низці точок по фронту тріщини. Для тіл з поперечними тріщинами ці точки збігаються з вузлами СЕ моделі, що лежать на фронті тріщини, а для тіл з поздовжніми тріщинами такими точками є точки інтегрування, розташовані вздовж вісі  $x^3$

В тілах з поперечними тріщинами привершинні області, в яких проводиться визначення КІН за напруженнями та переміщеннями і його подальше усереднення, розташовані в площині  $y^1 - y^2$ , яка є ортогональною до поверхні і фронту тріщини. Місця визначення КІН за переміщеннями та напруженнями в межах привершинної області визначаються розташуванням точок інтегрування вздовж вісі  $x^3$ . Враховуючи вимоги методики, пов'язані з явищем сингулярності, в точках, розташованих на відстанях менших  $0.1L_{тр}$  ( $L_{тр}$  довжина тріщини) вздовж вісей  $y^1 - y^2$  від вершини тріщини КІН не визначається. Також не визначається КІН за напруженнями в точках, що розташовані ближче  $0.05L_{тр}$  від вісі  $y^2$  (рис.4, точки обчислення КІН за напруженнями позначені кружками, за переміщеннями – хрестиками).

Для тіл з поздовжніми тріщинами КІН визначаються по всім точкам інтегрування вздовж вісі  $z^3$ , яка збігається за напрямком з фронтом тріщини. Привершинна область для кожної точки інтегрування знаходиться в площині поперечного перерізу тіла  $z^3 - z^2$ ,  $K(\sigma)$  визначається в центрах СЕ,  $K(u)$  – у вузлах СЕ моделі (рис.4), тобто в цьому випадку визначення КІН в межах привершинної області відбувається в поперечному перерізі тіла.

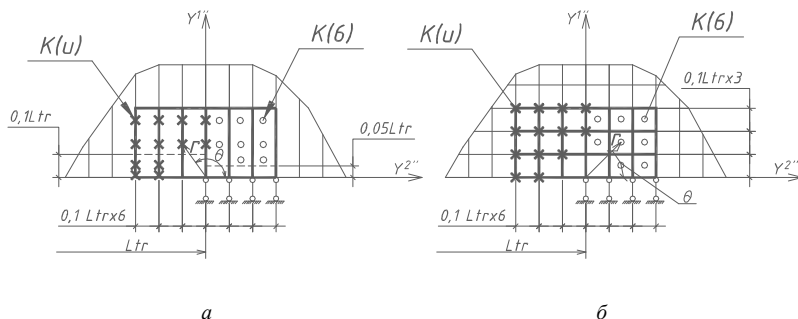


Рис. 4

Для тіл з поздовжніми тріщинами КІН визначаються по всім точкам інтегрування вздовж вісі  $z^3$ , яка збігається за напрямком з фронтом тріщини. Привершинна область для кожної точки інтегрування знаходиться в площині поперечного перерізу тіла  $z^3 - z^2$ ,  $K(\sigma)$  визначається в центрах СЕ,  $K(u)$  – у вузлах СЕ моделі (рис.4), тобто в цьому випадку визначення КІН в межах привершинної області відбувається в поперечному перерізі тіла [1].

З метою дослідження вірогідності і ефективності НМСЕ в просторових задачах механіки руйнування при динамічному навантаженні було проведено розв'язання задачі розтягу прямокутної пластини з крайовою тріщиною (рис. 5,а).

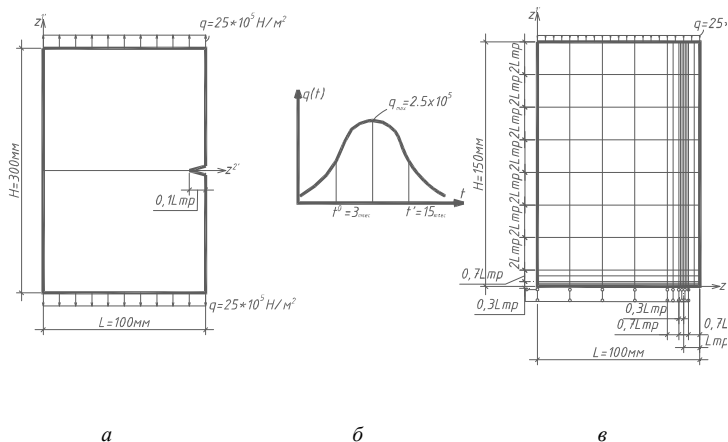


Рис. 5

Пластина знаходиться під дією імпульсного навантаження, графік якого наведений на рис. 5,б. Розрахунок виконувався в межах плоскої деформації на основі скінченно-елементної моделі, наведеної на рис. 5,в. При статичному навантаженні обчислені на основі НМСЕ значення КІН співпадають як з аналітичними [6], так і з експериментальними результатами [5] в межах 2%. Аналогічні дані отримані і при співставленні експериментальних даних роботи [5] і при динамічному навантаженні для максимальних значень КІН.

Таким чином, розроблена методика визначення лінійних параметрів руйнування дозволяє отримувати достовірні результати при розрахунку тіл з тріщинами в мікросекундному діапазоні дії динамічного навантаження.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.:НИИСМ, 1993. – 376 с.
3. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 73. – С. 73–82.
4. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 73. – С. 105-108.
5. *F. Catsamanis, D. Raftopoulos, P.S. Theocaris.* Static and Dynamic Stress Intensity Factors by the Method of Transmitted Caustics: Journal of Engineering Materials and Technology, 1977. – Vol.4 – P. 105-109.
6. *Саврук М. П., Осипов П.Н., Прокопчук И.В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К. Наукова думка, 1989.
7. *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.

*Надійшло до редакції 17.11.2006 р.*

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук  
Голуб О.О.

### ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК КІНЕМАТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ СМЕРЧУ ТА ТИСКУ НА ГОРИЗОНТАЛЬНУ ПОВЕРХНЮ

Для вивчення кінематичних і динамічних характеристик смерчу, вченими було запропоновано кілька моделей. Але не всі моделі відповідають дійсності та відображають цілісну картину. І.І. Смульським була запропонована стокова модель смерчу у вихровій камері [1]. Ця модель є найбільш близькою для відображення дії смерчу, оскільки стік рідини, яка обертається ідентичний руху середовища у вихровій камері. Отже, тиск смерчу можна приблизно описати таким чином [2]:

$$P = 2\rho v^2 \left( 0,5 - \frac{1}{1 + (r^2/R_v)^2} \right) + C, \quad (1)$$

де  $v$  - це тангенціальна швидкість,  $r$  - радіус ядра смерчу,  $R$  - радіус периферійної частини смерчу,  $\rho$  - щільність стінки смерчу. Для того щоб оцінити залежність тиску від швидкості, потрібно задавати деякі параметри  $r$  та  $R$ . Ці параметри повинні бути взяті з деякої області, щоб вони відповідали умовам (2), (3), (4).

Спочатку розглянемо такі випадки, коли  $P$  не буде приймати від'ємних та нульових значень, для цього повинні виконуватися такі умови:

$$\frac{1}{1 + \left( \frac{r^2}{R} \right)^2} < 0,5 \rightarrow 1 + \left( \frac{r^2}{R} \right)^2 > 2 \rightarrow \left( \frac{r^2}{R} \right)^2 > 1,$$

отже

$$\begin{cases} r \neq 1, & R \neq 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} r^2 \neq R, & r \neq \sqrt{R}. \end{cases} \quad (3)$$

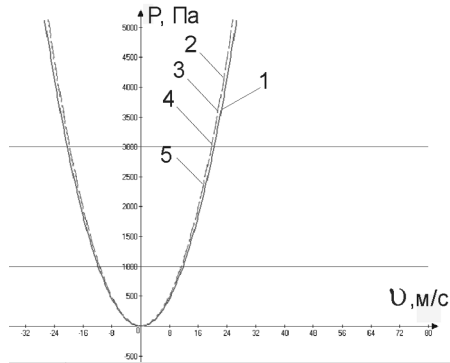
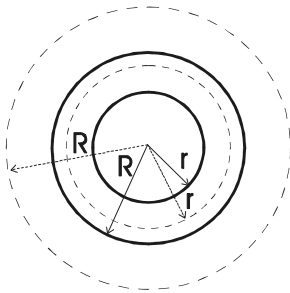
$$\begin{cases} r^2 > R, & r > \sqrt{R} \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно для побудови залежності тиску від швидкості потрібно вибирати такі значення  $r$ ,  $R$  що відповідають умовам (2), (3), (4).

Нехай для прикладу візьмемо значення  $r$  і  $R$  такі, що  $R=2r$  (рис. 1) і побудуємо графіки залежності тиску від швидкості для наступних значень (табл. 1).

Таблиця 1

№графіка	1	2	3	4	5	6	7
$R, \text{ м}$	20	50	100	300	500	800	1000
$r$	10	25	50	150	250	400	500

Рис. 1. Графік залежності  $P$  від  $v$ , при  $R=2r$ .

З графіка видно, що при незначному збільшенні швидкості, значно зростає тиск. В цьому випадку відбувається звуження кривої до осі  $P$ .

Наприклад, для  $P=1000$  Па (табл. 2)

Таблиця 2

№графіка	1	2	3	4	5	6	7
$v, \text{ м/с}$	11,8	11,4	11,34	11,32	11,323	11,323	11,322

Для  $P=3000$  Па (табл.3)

Таблиця 3

№графіка	1	2	3	4	5	6	7
$v, \text{ м/с}$	20,412	19,738	19,643	19,615	19,613	19,612	19,611

Далі, для з'ясування можливого характеру зміни кривої залежно від параметрів  $r$  та  $R$  зафіксуємо значення  $r$ , а значення  $R$  обиратимемо таким чином, щоб виконувались умови (2), (3), (4) (рис. 2):

№графіка	1	2	3	4	5
$R$ , м	50	100	300	500	800
$r$	30	30	30	30	30

В цьому випадку буде мати місце розширення кривої від осі  $P$  (рис. 2).

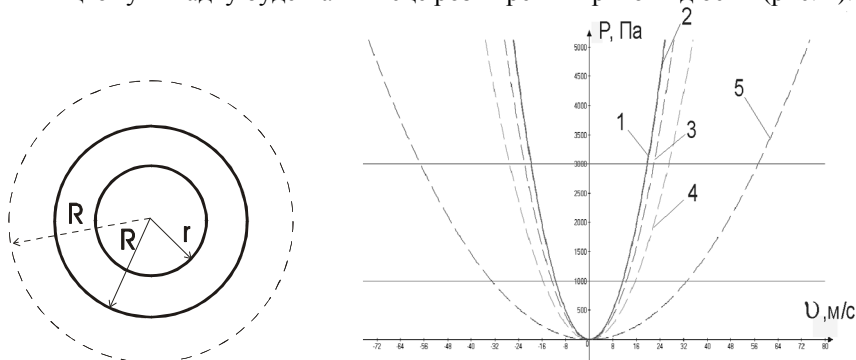


Рис. 2. Графік залежності  $P$  від  $v$ , при  $r=\text{const}$ ,  $R$  зростає

Для  $P=1000$  Па (табл. 4)

Таблиця 4

№графіка	1	2	3	4	5
$v$ , м/с	11,358	11,463	12,659	15,578	33,067

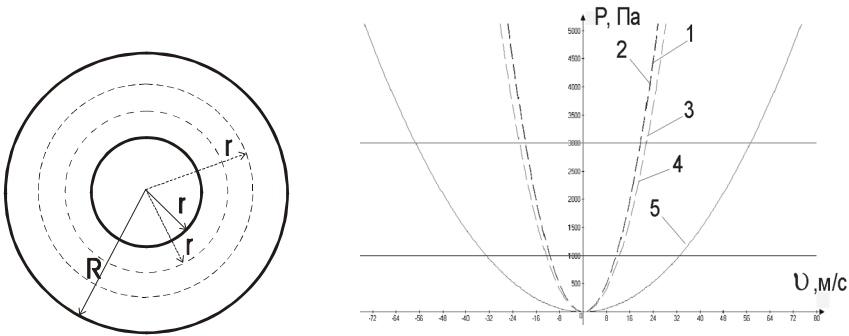
Для  $P=3000$  Па (табл. 5)

Таблиця 5

№графіка	1	2	3	4	5
$v$ , м/с	19,672	19,855	21,926	26,981	57,276

Зафіксуємо значення  $R$ , а  $r$  вибиратимемо таким чином, щоб виконувались умови (2), (3), (4) (рис. 3):

№графіка	1	2	3	4	5
$R$ , м	800	800	800	800	800
$r$	30	50	100	250	500

Рис. 3. Графік залежності  $P$  від  $v$ , при  $R=\text{const}$ ,  $r \rightarrow 0$ 

В даному разі буде мати місце звуження кривої до осі  $P$ , але з більшою інтенсивністю, ніж було на рис. 1.

Для  $P=1000$  Па (табл. 6)

Таблиця 6

№графіка	1	2	3	4	5
$v$ , м/с	33,068	12,548	11,395	11,324	11,322

Для  $P=3000$  Па (табл. 7)

Таблиця 7

№графіка	1	2	3	4	5
$v$ , м/с	57,276	27,734	19,738	19,614	19,611

Тиск на горизонтальну поверхню буде дорівнювати нулю при:

$$\left(\frac{r^2}{R}\right)^2 \rightarrow 1, \quad P=0. \quad (5)$$

А при  $r \rightarrow \infty$ , тиск буде максимальним,

$$p = \rho v^2 \quad (6)$$

Отже, взаємозв'язок швидкості та тиску, залежать від таких параметрів, як радіус центральної та периферійної областей. Зокрема, видно з графіків, що при однаковому збільшенні обох радіусів, тиск зростає з невеликою різницею. З другого графіка (коли внутрішній радіус

фіксуємо, а зовнішній збільшуємо) ми спостерігаємо зменшення тиску при одній і тій же швидкості. З третього графіка (фіксуємо зовнішній радіус, а внутрішній зменшуємо) повторюється ситуація але тиск зменшується з більшою динамічністю.

Враховуючи, що зовнішній діаметр обмежений, то очевидно можна врахувати чи хоча б оцінити необмежені рамки зміни величини  $\nu$ , яка залежить від параметрів  $r$ ,  $R$  при яких буде досягатися певне значення тиску на горизонтальну поверхню.

1. *Смульский И.Н.* Аэродинамика и процессы в вихревых камерах. — Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1992. 300 с.
2. *Гупта А., Лилли Д., Сайред Н.* Закрученные потоки. — М: Мир, 1987.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: ГИФМЛ, 1963. 583с.

*Надійшло до редакції 14.11.2006 р.*

УДК 539.3

Кобієв В.Г., канд. техн. наук

## **ОСОБЛИВОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ СПЕЦИФІКИ ВПЛИВУ ЗОВНІШНІХ ФАКТОРІВ НА ОБОЛОНКОВІ СИСТЕМИ ПРИ ІМПУЛЬСНИХ ДІЯХ ВЕЛИКОЇ ПОТУЖНОСТІ**

Інтенсивний розвиток машинобудування, авіації, ракетобудування, будівництва та інших галузей народного господарства обумовлює глибоке вивчення динамічних процесів у різних конструкціях, широке коло яких представляють різноманітні оболонкові системи. Використання таких систем дозволяє вирішити проблему матеріалоемності при збереженні необхідної міцності та надійності конструкцій.

В останні роки поширений інтерес викликає питання міцності конструкцій під дією енергії вибуху та ударних повітряних хвиль. Особливо це стосується різних інженерних споруд та відповідальних елементів машинобудівних конструкцій. Імпульсні навантаження з високим рівнем енергії впливу викликають високошвидкісне деформування конструкцій і супроводжується, як правило, різними фазовими переходами від одного стану матеріалу до іншого. Це, у свою чергу, викликає потребу розв'язання нових нестационарних задач для оболонкових конструкцій.

Першим етапом розв'язання таких задач є оцінка зовнішніх сил, які виникають при вибуху або ударній хвилі. Зазвичай це імпульсні короткочасні навантаження локального та розподільного характеру. Їхня оцінка є виключно важливою бо у значній мірі визначає точність кінцевого розв'язку задачі. Застосування складного математичного апарату щодо опису поведінки конструкції не дає бажаного результату, якщо зовнішні сили визначені не достатньо точно.

При визначенні навантаження від різного роду вибухових джерел користуються експериментальними даними при їх наявності, у протилежному випадку навантаження оцінюються за допомогою розрахункових схем, що базуються на знанні проміжних фізичних явищ, супроводжуваних вибуховим процесом. Особливо це важко, коли енергія вибуху безпосередньо передається оболонці. У таких випадках по поверхні дії ударної хвилі у матеріалі конструкції виникають напруження набагато вищі границі пружності, хоч уся конструкція працює у пружній області, а розміри пластичної зони порівняні з товщиною перешкоди.

Як правило, вибухи утворюють короточасні навантаження, що діють або підвищуються до максимального значення за час, порівняний або менше часу пробігу пружної хвилі шляху, рівному характерному розміру системи. Навантаження, що розглядаються, характеризуються амплітудними значеннями тиску та напружень, а також формою прикладеного імпульсу. Вони можуть утворюватися простішими хвилями стиску або напружень, а також ударними хвилями з нескінченно крутим фронтом.

В цілому проблема визначення та опису вибухових навантажень досить широка та складна, що далеко виходить за рамки даного дослідження. Тому нижче наводяться тільки ті вирази для зовнішніх сил, які можуть бути використані для розв'язання конкретних задач [1], [2], [3].

Найбільш широкими елементами оболонкових систем є гладкі осесиметричні оболонки обертання та конструкції з них. Щодо навантаження, які на залежать від окружної координати, виникають найбільш прості просторово-одномірні задачі. Але навіть для таких найбільш простих варіантів не існує єдиного підходу до розв'язання різноманітних за змістом нестационарних динамічних задач [2].

Розподіл тиску при дії ударної хвилі на оболонкову конструкцію у випадках, коли не треба враховувати впливу навколишнього середовища та взаємодії із продуктами детонації, можна описати наступним чином [3]:

$$\begin{aligned} p(r,t) &= p_1(r)(1-t/T), \quad 0 \leq t \leq T; \\ p(r,t) &\equiv 0, \quad t > T, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $r$  – відстань від епіцентру вибуху,  $p_1(r)$  – максимальний тиск,  $T$  – час дії навантаження.

Для вибуху зосереджених зарядів масою  $q$  у повітрі можна скористатися формулою Садовського [47]

$$p_1(r) = 7 \frac{q}{r^3} + 2,7 \frac{q^{2/3}}{r^2} + 0,84 \frac{q^{1/3}}{r}. \quad (2)$$

Час дії тиску представляє собою досить важливу характеристику ударної хвилі і виражається через масу заряду  $q$  та відстані  $r$ :

$$T = 0,0015 \sqrt{r} \sqrt[6]{q}, \quad (3)$$

де  $T$  подається у секундах,  $r$  – у метрах,  $q$  – у кілограмах.

Для вибухової хвилі, що генерується детонацією вибухового заряду, розташованого усередині будь якого замкнутого оболонкового об'єкту

або оболонкової камери, на стінки цього об'єкту можна розподілити на дві стадії.

Перша стадія пов'язана з навантаженням стінок при першому спаданні на них вибухової хвилі. На цій стадії стінки оболонки зазнають дію початкової відбивної хвилі малої тривалості, а на другій стадії – дії декількох наступних імпульсів тиску. Амплітуда наступних імпульсів тиску знижується із часом внаслідок необоротних термодинамічних процесів. Їхня форма може бути дуже складною внаслідок багатократного відбивання вибухових хвиль.

Хоча динаміка навантаження стінок оболонкових конструкцій при внутрішніх вибухах у випадку їх реальної геометрії є дуже складною, проте за допомогою законів подібності щодо відбитих вибухових хвиль та декількох спрощувальних припущень часто вдається отримати досить прості оцінки величини вибухового навантаження при внутрішніх навантаженнях [3].

Перше припущення полягає у тому, що падаюча та відбита хвилі мають трикутні профілі:

$$p_s(t) = \begin{cases} p_s(1-t/T), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T; \end{cases} \quad p_r(t) = \begin{cases} p_r(1-t/T), & 0 \leq t \leq T_r, \\ 0, & t > T_r. \end{cases} \quad (4)$$

Однак тривалості цих ефективних хвиль задаються не співпадаючими із реальними проміжками часу дії вибухової хвилі – замість цього їм приписують такі значення, щоб зберегти правильне значення імпульсної вибухової хвилі:

$$T_s = 2J_s / p_s; \quad T_r = 2J_r / p_r. \quad (5)$$

У цьому полягає друге припущення.

Третє припущення засновано на тому, що у більшості випадках параметри внутрішнього вибухового навантаження на стінки оболонки можна визначити за допомогою характеристик нормальної (прямої) відбитої хвилі навіть при косому відбитті хвилі від стінок оболонкової системи.

Нарешті, останнє припущення визначає час пробігу хвилі, а саме час між моментами послідовного відбиття вибухових хвиль від стінок конструкції:

$$t_{r=2} = 2t_a. \quad (6)$$

Це припущення не є точним, оскільки третя і друга відбиті хвилі слабші за першу, а тому і швидкість їх розповсюдження нижче швидкості першої. Проте рівняння (6) дає похибку того ж порядку величини, що і інші спрощуючі рівняння.

З урахуванням використаних вище припущень сумарне навантаження на стінки оболонкової конструкції у 1,75 разів перевищує навантаження від першого імпульсу тиску. Тому для об'ємів із характерним часом відгуку, значно перевищуючим тривалість третього імпульсного тиску, можна застосовувати ще біль сильне припущення, об'єднавши три імпульси тиску в один та помноживши амплітуду та імпульс хвилі на множник 1.75.

Щодо трикутних імпульсів тиску без ударного фронту справедливий наступний запис [3]:

$$p(r,t) = p_r(r) \frac{t}{t_r}, \quad 0 \leq t \leq t_r; \quad p(r,t) = p_r(r) \frac{t-T}{t_r-T}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

де  $t_r$  – час нарощення тиску,  $T$  – час спаду.

При розв'язанні багатьох задач зміна тиску у залежності від часу апроксимують експоненціальними показовими та степеневими функціями:

$$p_r(r,t) = p_r(r) e^{-t/T}; \quad p(r,t) = p_r(r) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^n. \quad (8)$$

Коли навантаження змінюється по синусоїдальному закону за часом, для його запису використовують вираз у вигляді:

$$p(r,t) = p_r(r) \sin \frac{\pi t}{T}. \quad (9)$$

Імпульсні навантаження, що виникають на вибухах газових або пилових речовин, багато в чому відрізняються від навантаження, які породжуються вибухом конденсованих речовин. Надлишковий тиск, викликаний вибухом конденсованої речовини, характеризується дуже малим часом наростання та майже експоненціальним спаданням. Навантаження, яке створюється вибухом газових або запиленних об'ємів, характеризується скінченим часом нарощення та різними законами зміни за часом.

Наприклад, зміна навантаження, що викликане вибухом неідеального джерела, може бути наближено описане формулами

$$p(t) = p_m \left( \frac{t}{t_d} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{t_r} t \right), \quad t \leq t_r; \quad (10)$$

$$p(t) = p_m \left( 1 - \frac{t-t_r}{t_d-t_r} \right) e^{-\frac{t-t_r}{t_d-t_r}}, \quad t_r \leq t \leq t_d,$$

де  $p_m$  – максимальне значення надлишкового тиску,  $t_d$  – тривалість навантаження.

Тоді максимальний темп нарощувального тиску, який визначається як нахил  $p(t)$  при  $t = t_r/2$ , можна записати у вигляді

$$\frac{dp}{dt} \left( t = \frac{t_r}{2} \right) = \frac{2p_m}{t_r}. \quad (11)$$

Вибухові навантаження у вигляді імпульсного тиску можуть діяти на всю оболонкову систему або на окремі її підсистеми. При цьому навантаження можуть носити як розподілений так і локальний характер, а також переміщуватися по об'єкту це багато в чому визначає вибір розрахункової моделі та постановку задачі. Щодо математичного запису зовнішніх сил та граничних умов можна використати функції (1) – (10) та їх різне сполучення.

Безумовно, реальна картина зовнішніх сил, які діють на оболонкові системи та їх елементи при виникненні енергії вибуху, набагато складна. Тому при виборі фізичної моделі треба ретельно аналізувати всі процеси, які супроводжують вибух, щоб визначити, які фактори і в який момент часу грають визначальну роль.

В залежності від виду імпульсного навантаження великої потужності застосовуються різні методи дослідження їхнього впливу на конструкцію. Наприклад, якщо позначити через  $T_0$  – характерний період власних коливань конструкції, а через  $\tau^+$  – тривалість позитивної фази хвилі навантаження, то при  $\tau^+/T_0 \leq 0.25$  дію навантаження  $F(t)$  ( закон зміни тиску за фронтом ударної хвилі) можна замінити дією миттєвого імпульсу

$$S = \int_0^{\tau^+} F(t) dt. \quad \text{Це приводить до завищення розрахункових величин та}$$

напружень [4]. При  $\tau^+/T_0 \geq 10$  виконується розрахунок на дію статично прикладеного тиску  $F_{\max}$ . Це припустимо при дії на конструкцію дуже довгої хвилі навантаження, наприклад, типу повітряної ударної хвилі від потужного вибуху в атмосфері [5].

Як приклад апроксимації високопотужного тиску на фронті циліндричної або сферичної ударної хвилі, що діє на внутрішню поверхню замкненої оболонки обертання, можна навести одну із формул, яку застосовують на практиці [6], [7]:

$$P(t) = P_m \exp[-(t - t_0)/\theta] F(t), \quad (12)$$

де  $P_m, \theta$  – сталі, що характеризують амплітуду (максимальний тиск) та швидкість спаду тиску (характеристичний час спаду тиску);  $t_0$  - час

затримки дії навантаження;  $F(t)$  – функція розподілу тиску уздовж твірної оболонки.

При дії такого тиску вважається, що матеріал оболонки переходить у пластичний стан при виконанні умов текучості Мізеса [8], [9] із урахуванням динамічної границі текучості за законом  $\sigma_i > \sigma_T^\circ$ ,

$$\sigma_T^\circ = \sigma_T [1 + (e_i / D^*)^{1/n^*}], \quad (13)$$

де  $\sigma_i$ ,  $e_i$  – інтенсивність напружень та швидкостей деформацій;  $\sigma_T^\circ$ ,  $D^*$ ,  $n^*$  – параметри матеріалу, що характеризують опір матеріалу швидкісному деформуванню [10], по іншому, параметри кінематичного зміцнення [11].

Вибухові явища, що приводять до імпульсного характеру прикладення навантаження до конструкції, часто представляють собою короточасний процес перетворення речовини із виділенням великої кількості енергії в невеликому об'ємі. Вказані перетворення виникають здебільшого у результаті хімічних реакцій (конденсовані, рідинні та газообразні речовини) [12], [13]. До вибухів, що викликані фізичними чинниками, можна віднести вибухи резервуарів із стислим газом, парових котлів тощо. Це можуть бути також іскрові розряди [1], [14].

При вибуху у атмосфері виникають повітряні ударні хвилі, що розповсюджуються у вигляді області стиску-розрідження зі стрибком на своєму фронті тиску, температури, щільності та швидкості часток (масової швидкості). Ефект дії ударних хвиль залежить як від виду симетрії, так і від відстані точки (лінії, площини) вибуху відносно розташування споруди на земній поверхні [5].

При повітряному вибуху ударна сферична хвиля досягає земної поверхні та відбивається від неї. На деякій відстані від епіцентру вибуху (проекції центру вибуху на земну поверхню) фронт відбитої хвилі зливається із фронтом хвилі, що падає, внаслідок чого виникає так звана головна хвиля із вертикальним фронтом, що розповсюджується від епіцентру уздовж земної поверхні і діє на споруду [10], [5].

Ближня зона, де відсутнє злиття фронтів, є зоною регулярного відбиття, в той час як дальня зона, в якій розповсюджується головна хвиля, є зоною нерегулярного відбиття. У ближній зоні при помірній відстані від вибуху тиск ударної хвилі надто великий. Характер повітряної ударної хвилі, якщо вибух стався на земній поверхні, відповідає властивостям дальньої зони цього виду вибуху [3], [15].

З моменту приходу фронту повітряної хвилі у точку земної поверхні, де може бути розташована споруда, тиск різко підвищується до

максимального значення  $P_\phi$ , а потім спадає до атмосферного  $P_0$  і нижче атмосферного. За фазу тиску тут приймається згадуваний вище параметр  $\tau^+$ , що характеризує період підвищеного надмірного (зверх атмосферного) тиску  $\Delta P = P - P_0 > 0$ , а за фазу розрядження – параметр  $\tau_-$ , що характеризує період зниженого тиску  $\Delta P < 0$ . Водночас із тиском в ударній хвилі виникає рух повітряного середовища від епіцентру (центра) вибуху. Закони змін масової швидкості  $\mu$  та густини  $\rho$  середовища в часі якісно аналогічні зміні тиску, проте внаслідок інерційності повітряного потоку період  $\tau^{+ck}$  позитивної фази швидкісного напору  $P_{ck} = 1/2\rho\mu^2 > 0$  трохи більше ніж  $\tau^+$  [4].

Надмірний тиск у хвилі та швидкісний напір є важливими характеристиками ударної хвилі, що визначають ефект її дії на споруду. Тому за основні параметри, що визначають інтенсивність ударної хвилі, при розрахунках приймають надмірний тиск на фронті  $\Delta P_\phi$  та тривалість

фази стиску  $\tau^+$ . Ці параметри залежать від енергії вибуху, висоти  $H$  над поверхнею землі, де знаходиться споруда, умов вибуху, а також відстані  $R$  від епіцентру [10], [4], [16]. Зважаючи на те, що максимальні деформації в конструкціях споруд здебільшого виникають у початковий період дії ударної хвилі, тобто за час, що набагато менше тривалості  $\tau^+$ , в розрахунках конструктивних елементів часто приймається зміна тиску по дотичній до істинної кривої навантаження  $dP(t)$ .

Розглядаючи різноманітні імпульсні навантаження високого тиску, треба завжди враховувати, що у загальному випадку відмітною рисою таких навантажень є високий рівень напружень у матеріалі конструкцій (до кількох сотень МПа), які діють, що було вже зазначено, упродовж короткого проміжку часу (мілісекунди – мікросекунди) та визначають високу швидкість зміни навантажень у часі, отже і високу швидкість деформування.

З огляду на це розгляд процесів високошвидкісного деформування, що характерно, підкреслюємо, для імпульсного прикладення навантаження великої дії, перетинається ще з одним напрямком дослідження по даному питанню. Зокрема, їх розгляд представляє великий інтерес у зв'язку з розробкою загальної теорії поведінки матеріалів під дією навантажень з урахуванням реологічних властивостей – основної проблеми механіки деформівного тіла [17], [18], [19], [20], але це питання виходить за межі об'єму даної роботи і потребує окремого додаткового дослідження.

1. Взрывные и стационарные процессы в сплошных средах / Ред. кол. В.Н. Монахов и др. – М.: Наука, 1968г. – 163 с.
2. Высокоскоростные ударные явления. Сб. статей: Пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 553 с.
3. Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках / Луговой Т.З., Мукоед В.П., Мейш В.Ф. Отв. ред. Гузь А.Н.; НАН Украины, Ин-т механики. – Киев: Наукова думка, 1991. – 280 с.
4. Скоростное деформирования элементов конструкций / Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В. и др. Ин-т проблем машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1989. – 203 с.
5. Убежища гражданской обороны: Конструкции и расчет / В.А. Котляревский, В.И. Ганумкин, А.А. Костин и др.; Под ред. В.А. Котляревско – М.: Стройиздат, 1989. – С. 6-23, 501-505.
6. *Филитов А.П., Клименко В.Г.* Учет скорости при упругопластическом импульсном деформировании тонкостенных цилиндров // Проблемы машиностроения. – 1976. – Вып. 2. – С. 5-10.
7. *Филитов А.П., Янютин Е.Г.* Определение начальной реакции конической оболочки на импульсную нагрузку // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7, № 8. – С. 111-114.
8. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: Л.: Гостехиздат, 1948. – 378 с.
9. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. 2-е изд. Перераб и допол. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
10. *Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В.* Ударное воздействие взрывной волны на оболочечные конструкции // Динамика и прочность судовых машин: Сб. науч. трудов Николаевского кораблестроительного ин-та. – Николаев, 1983. – С. 94-102.
11. *Волощенко-Климовицкий Ю.Я.* Динамический предел текучести. – М.: Наука, 1965. – 180 с.
12. *Гун Г.Я.* Математическое моделирование процессов обработки материалов давлением. – М.: Metallurgy, 1983. – 352 с.
13. *Ионов В.Н., Огибалов П.М.* Напряжения в телах при импульсном нагружении. – М.: Вышша школа, 1975. – 463 с.
14. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966. – 268 с.
15. *Николас Т.* Упругопластические волны напряжений // Динамика удара // Пер. с англ. под ред. С.С. Григоряна. – М.: Мир, 1985. – С. 116-148.
16. *Филитов А.П.* Деформирование элементов конструкции под действием ударных импульсных нагрузок. – Киев: Наук. думка, 1978. – 193 с.
17. *Майборода В.П., Кравчук А.С., Холин Н.Н.* Скоростное деформирование конструкционных материалов. – М.: Машиностроение. – 1986. – 264 с.
18. *Орленко Л.П.* Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках. – М.: Машиностроение, 1964. – 168 с.
19. *Райтхардт Дж., Пирсон Дж.* Поведение материалов при импульсных нагрузках. – М.: Изд-во иностр. лит., 1968. – 297 с.
20. *Степанов Г.В.* Упругопластическое деформирование материалов под действием импульсных нагрузок. – Киев: Наукова думка, 1979. – 266 с.

*Надійшло до редакції 10.11.2006 р.*

УДК 539.3:589.03:589.04:624.04

Станкевич А.М., канд. техн. наук

Шкельов Л.Т., канд. техн. наук

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРУЖНОГО ПРОСТОРОВОГО ТІЛА, ЯКЕ МАЄ ФОРМУ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Викладено методику визначення напружено-деформованого стану просторового пружного тіла, яка будується на застосуванні методу прямих. За невідомі прийнято компоненти вектора переміщень. За умови дискретизації у двох напрямках, тримірна задача зводиться до одномірної. Прийнята періодичність зміни невідомих у напрямках дискретизації дозволяє отримати матрицю диференціальних рівнянь, для якої знаходиться точне аналітичне рішення.

Застосування методу прямих для визначення напружено-деформованого стану (НДС) пластин, оболонок та пластинчастих систем викладено у роботах [1,4]. У даній роботі запропонований метод поширюється на визначення НДС пружного просторового тіла, яке має форму паралелепіпеда. В якості розв'язуючих функцій прийняті складові вектора переміщень, які паралельні координатним осям  $U_x(x, y, z)$ ,  $U_y(x, y, z)$ ,  $U_z(x, y, z)$ . Вони є невідомими функціями трьох змінних.

Для розв'язку задачі застосовується метод прямих, при використанні якого потрібно провести дискретизацію шуканих функцій. Дискретизацію проводимо за напрямками вздовж осі  $OY$  та  $OZ$  (рис. 1).

У напрямку вздовж осі  $OX$  зберігається безперервність невідомих функцій. Внаслідок виконання дискретизації здійснюється перехід від трьох функцій, кожна з яких залежить від трьох змінних, до системи функцій однієї змінної  $x$ . Загальна кількість рівнянь дорівнює  $3 \times n \times m$ , де  $n$  та  $m$  - кількість точок дискретизації відповідно у напрямку осі  $OY$  та  $OZ$ . Система апроксимуючих функцій однієї змінної визначається вздовж прямих, які паралельні осі  $OX$ . Прямі проведено крізь вузлові точки сітки дискретизації при  $n=5$  та  $m=4$  (рис. 1). Об'єднаємо функції у три блочні вектори  $\bar{U}_x$ ,  $\bar{U}_y$ ,  $\bar{U}_z$ , кожний з яких складається з  $n$  блоків розміром  $m$ . У блок входять функції, які відповідають точкам сітки, розташованим на лініях, паралельних осі  $OZ$ :

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} (\bar{U})_1 \\ \vdots \\ (\bar{U})_i \\ \vdots \\ (\bar{U})_n \end{pmatrix}; \quad (\bar{U})_i = \begin{pmatrix} U_{i1'} \\ \vdots \\ U_{ik'} \\ \vdots \\ U_{im'} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

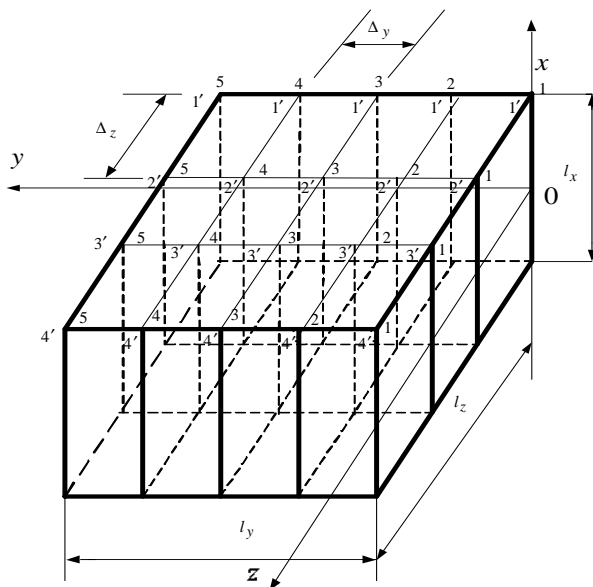


Рис. 1. Схема нанесення прямих

Система рівнянь рівноваги в переміщеннях для просторового тіла має вигляд:

$$\begin{aligned} & \left( \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot U_x + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} = 0, \\ & \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + \left( \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot U_y + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y \partial z} = 0, \\ & \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y \partial z} + \left( \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot U_z = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут позначено:

$$\mu_1 = 2(1 - \mu), \mu_2 = (1 - 2\mu),$$

де  $\mu$  - коефіцієнт Пуассона.

Запишемо цю систему з врахуванням прийнятого характеру апроксимації. У цьому випадку потрібно, як відомо, безперервні похідні замінити кінцево-різницевиими співвідношеннями. Вони містять значення функцій, які відповідають одному ряду позаконтурних точок дискретизації (рис. 2).

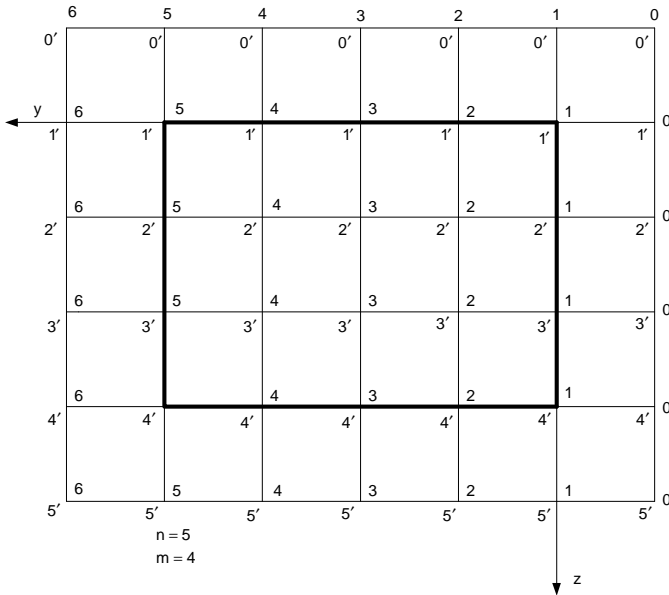


Рис. 2. Розташування контурних та позаконтурних точок

Якщо допустити, що функції у напрямку осей  $OY$  та  $OZ$  мають періодичний характер зміни, це дозволяє встановити залежності між позаконтурними функціями та функціями у точках на контурі тіла.

Виходячи з даного припущення, отримуємо можливість записати такі залежності:

- функції, які відповідають позаконтурній лінії "0" (рис. 2), дорівнюють функціям, які відповідають лінії "n";
- функції, які відповідають позаконтурній лінії "(n + 1)", дорівнюють функціям, які відповідають лінії "1".



Рівняння (3) це система звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Кількість рівнянь дорівнює  $3 \cdot n \cdot m$ . Для розв'язання системи використовуємо операторний метод. Похідні по змінній  $x$  визначаються як добуток функції на відповідну ступінь оператора диференціювання  $s$  з додаванням початкових значень функції та її похідних. Як приклад, розглянемо вигляд другої похідної:

$$\frac{d^2\bar{U}}{dx^2} = s^2 \cdot \bar{U} - s \cdot \bar{U}_0 - \bar{U}_0. \quad (5)$$

Враховуючи це співвідношення у системі (3), отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} & \left[ \mu_1 s^2 (E_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_y^2} (C_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_z^2} (E_n(C_m)) \right] \cdot \bar{U}_x + \\ & + \frac{s}{\Delta_y} (A_n(E_m)) \cdot \bar{U}_y + \frac{s}{\Delta_z} (E_n(A_m)) \cdot \bar{U}_z = \bar{P}_x, \\ & \frac{s}{\Delta_y} (B_n(E_m)) \cdot \bar{U}_x + \left[ \mu_2 s^2 (E_n(E_m)) + \frac{\mu_1}{\Delta_y^2} (C_n(E_m)) + \right. \\ & \left. + \frac{\mu_2}{\Delta_z^2} (E_n(C_m)) \right] \cdot \bar{U}_y + \frac{1}{\Delta_y \Delta_z} (B_n(A_m)) \cdot \bar{U}_z = \bar{P}_y, \\ & \frac{s}{\Delta_z} (E_n(B_m)) \cdot \bar{U}_x + \frac{1}{\Delta_y \Delta_z} (A_n(B_m)) \cdot \bar{U}_y + \\ & + \left[ \mu_2 s^2 (E_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_y^2} (C_n(E_m)) + \frac{\mu_1}{\Delta_z^2} (E_n(C_m)) \right] \cdot \bar{U}_z = \bar{P}_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Праві частини отриманих рівнянь мають вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{P}_x &= \mu_1 s (E_n(E_m)) \cdot \bar{U}_{x0} + \mu_1 (E_n(E_m)) \cdot \bar{U}'_{x0} + \\ & + \frac{1}{\Delta_y} (A_n(E_m)) \cdot \bar{U}_y + \frac{1}{\Delta_z} (E_n(A_m)) \cdot \bar{U}_{z0}, \\ \bar{P}_y &= \frac{1}{\Delta_y} (B_n(E_m)) \cdot \bar{U}_{x0} + \mu_2 s (E_n(E_m)) \cdot \bar{U}_{y0} + \mu_2 (E_n(E_m)) \cdot \bar{U}'_{y0}, \\ \bar{P}_z &= \frac{1}{\Delta_z} (E_n(B_m)) \cdot \bar{U}_{x0} + \mu_2 s (E_n(E_m)) \cdot \bar{U}_{z0} + \mu_2 (E_n(E_m)) \cdot \bar{U}'_{z0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} (C_x) &= \left[ \mu_1 s^2 (E_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_y^2} (C_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_z^2} (E_n(C_m)) \right], \\ (C_y) &= \left[ \mu_2 s^2 (E_n(E_m)) + \frac{\mu_1}{\Delta_y^2} (C_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_z^2} (E_n(C_m)) \right], \\ (C_z) &= \left[ \mu_2 s^2 (E_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_y^2} (C_n(E_m)) + \frac{\mu_1}{\Delta_z^2} (E_n(C_m)) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Усі матриці  $(C_x)$ ,  $(C_y)$ ,  $(C_z)$  мають однакову блочну структуру та відрізняються лише розташуванням коефіцієнтів  $\mu_1$  та  $\mu_2$ .

З врахуванням прийнятих позначень, система (4) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} (C_x) \cdot \bar{U}_x + \frac{s}{\Delta_y} (A_n(E_m)) \cdot \bar{U}_y + \frac{s}{\Delta_z} (E_n(A_m)) \cdot \bar{U}_z &= \bar{P}_x, \\ \frac{s}{\Delta_y} (B_n(E_m)) \cdot \bar{U}_x + (C_y) \cdot \bar{U}_y + \frac{1}{\Delta_y \Delta_z} (B_n(A_m)) \cdot \bar{U}_z &= \bar{P}_y, \\ \frac{s}{\Delta_z} (E_n(B_m)) \cdot \bar{U}_x + \frac{1}{\Delta_y \Delta_z} (A_n(B_m)) \cdot \bar{U}_y + (C_z) \cdot \bar{U}_z &= \bar{P}_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Матрицю  $C$  можна представити у вигляді добутку трьох матриць, елементи яких дорівнюють власним числам та власним векторам матриці  $C$

$$C = V \cdot \{\lambda_i\} \cdot V. \quad (10)$$

Елементи квадратної матриці  $V$  дорівнюють компонентам власних векторів матриці  $C$  та визначаються за формулою:

$$V_{ij} = \frac{\sqrt{n}}{n} \left( \sin \frac{2ij\pi}{n} + \cos \frac{2ij\pi}{n} \right), \quad (11)$$

де  $n$  розмірність матриць  $C$  та  $V$ .

Елементи діагональної матриці  $\{\lambda_i\}$  розмірністю  $n \times n$  дорівнюють власним числам матриці  $C$  та визначаються за формулою:

$$\lambda_i = 2 \left( 1 - \cos \frac{2i\pi}{n} \right) = 4 \sin^2 \frac{i\pi}{n}. \quad (12)$$

Неважко довести, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_y^2} (C_n(E_m)) &= \frac{1}{\Delta_y^2} ((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk}) \{ \{ \lambda \}_k \} ((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk}), \\ \frac{1}{\Delta_z^2} (E_n(C_m)) &= \frac{1}{\Delta_z^2} ((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk}) \{ \{ \lambda_i \} \} ((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk}). \end{aligned} \quad (13)$$

Наведемо вигляд блочних матриць, які входять у вираз (13):

$$((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk}) = \begin{pmatrix} (V_{it})_{11} \cdot V_{11} & (V_{it})_{12} \cdot V_{12} & \cdots & \cdots & (V_{it})_{1n} \cdot V_{1n} \\ (V_{it})_{21} \cdot V_{21} & (V_{it})_{22} \cdot V_{22} & \cdots & \cdots & (V_{it})_{2n} \cdot V_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (V_{it})_{n1} \cdot V_{n1} & (V_{it})_{n2} \cdot V_{n2} & \cdots & \cdots & (V_{it})_{nn} \cdot V_{nn} \end{pmatrix}.$$

Блоки  $(V_{it})_{jk}$  не змінюються при зміні індексів  $jk$ . Елементи цих блоків дорівнюють компонентам власних векторів матриці  $C$  розмірами  $m \times m$ . Від значень індексів  $jk$  залежить множник  $V_{jk}$  на який множимо усі елементи блоку  $(V_{it})_{jk}$ . Значення множників  $V_{jk}$  дорівнюють елементам власних векторів матриці  $C$  розміром  $n \times n$ . Вище було наведено формулу (11) для визначення компонентів власних векторів матриці  $C$ . Враховуючи це, запишемо:

$$\begin{aligned} V_{it} &= \frac{\sqrt{m}}{m} \left( \sin \frac{2it\pi}{m} + \cos \frac{2it\pi}{m} \right), \\ V_{jk} &= \frac{\sqrt{n}}{n} \left( \sin \frac{2jk\pi}{n} + \cos \frac{2jk\pi}{n} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Отже, елементи матриці  $(V_{it})_{jk} \cdot V_{jk}$  можна визначити за формулою:

$$V_{itjk} = V_{it} \cdot V_{jk} = \frac{\sqrt{m}}{m} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n} \left( \sin \frac{2it\pi}{m} + \cos \frac{2it\pi}{m} \right) \left( \sin \frac{2jk\pi}{n} + \cos \frac{2jk\pi}{n} \right). \quad (15)$$

При цьому необхідно зауважити, що індекси  $i$  та  $t$  змінюються у межах блоку  $(V_{it})_{jk}$  та набувають значень від 1 до  $m$ . Індекси  $j$  та  $k$  змінюються при переході від блоку до блоку та набувають значень від 1 до  $n$ . Введемо скорочене позначення:

$$((V_{it})_{jk} \cdot V_{jk}) = ((V_{it})_{jk}). \quad (16)$$

Підкреслимо дуже важливу властивість цієї матриці.

$$((V_{it})_{jk}) \cdot ((V_{it})_{jk}) = (E_n(E_m)). \quad (17)$$

Діагональні матриці  $\{\{\lambda\}_k\}$  та  $\{\{\lambda\}_i\}$  мають такий вигляд:

$$\{\{\lambda\}_k\} = \begin{vmatrix} \{\lambda\}_1 & & & \\ & \{\lambda\}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \{\lambda\}_n \end{vmatrix}, \quad \{\{\lambda\}_k\} = \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_k & & & \\ & \lambda_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{vmatrix}}_m \quad \left. \vphantom{\{\{\lambda\}_k\}} \right\} m$$

$$\{\{\lambda\}_i\} = \underbrace{\begin{vmatrix} \{\lambda\}_i & & & \\ & \{\lambda\}_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \{\lambda\}_i \end{vmatrix}}_n \quad \left. \vphantom{\{\{\lambda\}_i\}} \right\} n \quad \{\{\lambda\}_i\} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{vmatrix}.$$

Елементи цих матриць являють собою власні числа матриць  $C$  розмірністю  $n \times n$  та  $m \times m$  і визначаються за формулами:

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{n}, \quad \lambda_i = 4 \sin^2 \frac{i\pi}{m}. \quad (18)$$

Для подальших перетворювань введемо такі позначення:

$$\frac{1}{\Delta_y^2} \lambda_k = -\alpha_k^2, \quad \frac{1}{\Delta_z^2} \lambda_i = -\beta_i^2, \quad \alpha_k^2 + \beta_i^2 = \gamma_{ik}^2. \quad (19)$$

Враховуючи введені позначення (12) та (16), отримуємо:

$$\frac{1}{\Delta_y^2} (C_n(E_m)) = -((V_{it})_{jk}) \{\{\lambda^2\}_k\} ((V_{it})_{jk}),$$

$$\frac{1}{\Delta_z^2} (E_n(C_m)) = -((V_{it})_{jk}) \{\{\beta_i^2\}\} ((V_{it})_{jk}), \quad (20)$$

$$(E_n(E_m)) = ((V_{it})_{jk}) \cdot ((V_{it})_{jk}).$$

Після врахування цих виразів у рівняннях (6), знайдемо:

$$\begin{aligned}
 (C_x) &= ((V_{it})_{jk}) \{ \{ \lambda_{xi}^2 \}_k \} ((V_{it})_{jk}), \\
 (C_y) &= ((V_{it})_{jk}) \{ \{ \lambda_{yi}^2 \}_k \} ((V_{it})_{jk}), \\
 (C_z) &= ((V_{it})_{jk}) \{ \{ \lambda_{zi}^2 \}_k \} ((V_{it})_{jk}).
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Компоненти діагональних матриць у цих формулах мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{xik}^2 &= \mu_1 (s^2 - \gamma_{ik}^2) + \gamma_{ik}^2, \\
 \lambda_{yik}^2 &= \mu_2 (s^2 - \gamma_{ik}^2) - \alpha_k^2, \\
 \lambda_{zik}^2 &= \mu_2 (s^2 - \gamma_{ik}^2) - \beta_k^2.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Враховуючи усі перетворення, розв'язок системи рівнянь (9) запишемо у вигляді:

$$\bar{U}_x = D^{-1} \cdot \bar{R}_x, \quad \bar{U}_y = D^{-1} \cdot \bar{R}_y, \quad \bar{U}_z = D^{-1} \cdot \bar{R}_z.
 \tag{23}$$

Матриця  $D$  у цих виразах – це визначник системи рівнянь (9).

$$D = \begin{vmatrix}
 (C_x); & \frac{s}{\Delta_y} (A_n(E_m)); & \frac{s}{\Delta_z} (E_n(A_m)); \\
 \frac{s}{\Delta_y} (B_n(E_m)); & (C_y); & \frac{1}{\Delta_y \Delta_z} (B_n(A_m)); \\
 \frac{s}{\Delta_z} (E_n(B_m)); & \frac{1}{\Delta_y \Delta_z} (A_n(B_m)); & (C_z);
 \end{vmatrix}.$$

У розгорнутому вигляді маємо такий вираз:

$$\begin{aligned}
 D &= (C_x)(C_y)(C_z) + \frac{s^2}{\Delta_y^2 \Delta_z^2} (A_n(E_m))(E_n(B_m))(B_n(A_m)) + \\
 &+ \frac{s^2}{\Delta_y^2 \Delta_z^2} (E_n(A_m))(B_n(E_m))(A_n(B_m)) - \frac{s^2}{\Delta_z^2} (C_y)(E_n(A_m))(E_n(B_m)) - \\
 &- \frac{1}{\Delta_y^2 \Delta_z^2} (C_x)(B_n(A_m))(A_n(B_m)) - \frac{s^2}{\Delta_y^2} (C_z)(B_n(E_m))(A_n(E_m)).
 \end{aligned}$$

Після відповідних перетворень отримаємо:

$$D = ((V_{it})_{jk}) \{ \{\lambda_{xi}^2\}_k \{\lambda_{yi}^2\}_k \{\lambda_{zi}^2\}_k + 2s^2 \{\beta_i^2\} \{\alpha^2\}_k + s^2 \{\lambda_{yi}^2\}_k \{\beta_i^2\} + s^2 \{\lambda_{zi}^2\}_k \{\alpha^2\}_k - \{\lambda_{xi}^2\}_k \{\alpha^2\}_k \{\beta_i^2\} \} ((V_{it})_{jk}).$$

Враховуючи співвідношення (22), в кінцевому результаті маємо:

$$D = ((V_{it})_{jk}) \{ (s^2 - \gamma_{ik}^2)^3 \} ((V_{it})_{jk}).$$

Зворотну матрицю  $D^{-1}$  визначимо беручи до уваги рівність (17).

$$D^{-1} = ((V_{it})_{jk}) \left\{ \frac{1}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^3} \right\} ((V_{it})_{jk}). \quad (24)$$

Вектори  $\bar{R}_x$ ,  $\bar{R}_y$ ,  $\bar{R}_z$ , які входять у вираз (23), знаходимо, виконуючи заміну в матриці  $D$ . Відповідно перший, другий та третій стовпчики замінюємо векторами правих частин системи (9). При цьому враховуємо співвідношення (7).

Не зупиняючись на виконаних перетвореннях, запишемо остаточний операторний вираз шуканої функції  $\bar{U}_x$ , враховуючи, що матриця  $D^{-1}$  прийнята відповідно виразу (24).

$$\begin{aligned} \bar{U}_x = & \frac{1}{\mu_1} ((V_{it})_{jk}) \left\{ \frac{s[\mu_1(s^2 - \gamma_{ik}^2) - \gamma_{ik}^2]}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^2} \right\} ((V_{it})_{jk}) \cdot \bar{U}_{x0} + \\ & + \frac{1}{\mu_2} ((V_{it})_{jk}) \left\{ \frac{\mu_2(s^2 - \gamma_{ik}^2) - \gamma_{ik}^2}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^2} \right\} ((V_{it})_{jk}) \cdot \bar{U}'_{x0} - \\ & - \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\Delta_y} (A_n(E_m)) ((V_{it})_{jk}) \left\{ \frac{\gamma_{ik}^2}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^2} \right\} ((V_{it})_{jk}) \cdot \bar{U}_{y0} - \\ & - \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{\Delta_y} (A_n(E_m)) ((V_{it})_{jk}) \left\{ \frac{s}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^2} \right\} ((V_{it})_{jk}) \cdot \bar{U}'_{y0} - \\ & - \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\Delta_z} (E_n(A_m)) ((V_{it})_{jk}) \left\{ \frac{\gamma_{ik}^2}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^2} \right\} ((V_{it})_{jk}) \cdot \bar{U}_{z0} - \\ & - \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{\Delta_z} (E_n(A_m)) ((V_{it})_{jk}) \left\{ \frac{s}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^2} \right\} ((V_{it})_{jk}) \cdot \bar{U}'_{z0}. \end{aligned}$$

Відомо, що кожному операторному виразу відповідає певний функціональний аналог [2]. Наведемо ці співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2 - \gamma_{ik}^2} &\Rightarrow \frac{1}{\gamma_{ik}} sh \gamma_{ik} x, \\ \frac{s}{s^2 - \gamma_{ik}^2} &\Rightarrow ch \gamma_{ik} x, \\ \frac{1}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^2} &\Rightarrow \frac{1}{2\gamma_{ik}^3} (x\gamma_{ik} ch \gamma_{ik} x - sh \gamma_{ik} x), \\ \frac{s}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^2} &\Rightarrow \frac{1}{2\gamma_{ik}^2} (x\gamma_{ik} sh \gamma_{ik} x), \\ \frac{s^2}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^2} &\Rightarrow \frac{1}{2\gamma_{ik}} (x\gamma_{ik} ch \gamma_{ik} x + sh \gamma_{ik} x), \\ \frac{s^3}{(s^2 - \gamma_{ik}^2)^2} &\Rightarrow \frac{1}{2} (x\gamma_{ik} sh \gamma_{ik} x + 2ch \gamma_{ik} x). \end{aligned} \quad (25)$$

Операторні вирази у рівняннях (24) позначимо, відповідно  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$ . Матрицю  $((V_{it})_{jk})$  для скорочення запису позначимо  $\tilde{V}$ . З урахуванням цих позначень, у рівняннях (24)  $\bar{U}_x$  набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{U}_x = & \frac{1}{\mu_1} \cdot \tilde{V}\{f_{x1}\} \tilde{V} \cdot \bar{U}_{x0} + \frac{1}{\mu_2} \cdot \tilde{V}\{f_{x2}\} \tilde{V} \cdot \bar{U}'_{x0} - \frac{1}{\mu_2 \Delta_y} (A_n(E_m)) \tilde{V}\{f_{x3}\} \tilde{V} \cdot \bar{U}_{y0} - \\ & - \frac{1}{\mu_1 \Delta_y} (A_n(E_m)) \cdot \tilde{V} \cdot \{f_{x4}\} \cdot \tilde{V} \cdot \bar{U}'_{y0} - \frac{1}{\mu_2 \Delta_z} (E_n(A_m)) \cdot \tilde{V} \cdot \{f_{x5}\} \cdot \tilde{V} \cdot \bar{U}_{z0} - \\ & - \frac{1}{\mu_1 \Delta_z} (E_n(A_m)) \cdot \tilde{V} \cdot \{f_{x6}\} \cdot \tilde{V} \cdot \bar{U}'_{z0}. \end{aligned}$$

Невідомі константи  $\bar{U}_{x0}$ ,  $\bar{U}'_{x0}$ , ...,  $\bar{U}'_{z0}$  визначаються з граничних умов на гранях, які перпендикулярні осі  $OX$ . Для того, щоб задовольнити граничні умови по інших гранях, необхідно побудувати аналогічне рішення, обираючи напрямки прямих паралельно цим осям.

Для тестування запропонованої методики було отримано рішення та чисельні значення переміщень та напружень у жорстко закріпленому по бокових поверхнях кубі з розмірами грані 1м на вертикальне навантаження. Похибка отриманих результатів у порівнянні з іншими методами в межах 5-7% в залежності від кількості прямих.

1. Шкелёв Л.Т., Морсков Ю.А., Романова А.П., Станкевич А.Н. Метод прямых и его использование при определении напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек. – К.: Национальная академия наук Украины, Институт механики им. С.П. Тимошенко, Технический центр, 2002. – 177 с.
2. Микусинский Ян. Операторное исчисление. – М.: Издательство иностранной литературы, 1959. – 366 с.
3. Новожилев В.В. Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958. – 369 с.
4. Шкелёв Л.Т., Станкевич А.Н., Пошивач Д.В., Корбаков А.Ф. Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояний пространственных и пластинчатых конструктивных элементов. – К. КНУБА, 2004. – 135 с.

*Надійшло до редакції 16.11.2006 р.*

УДК. 539.3

Соловйов І.Л., канд. техн. наук

## ДИНАМІЧНА ВТРАТА СТІЙКОСТІ ТОНКОСТІННИХ ВАЛІВ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ, ПІД ДІЄЮ СТИСКУ ОСЬОВОЇ СЛІДКУЮЧОЇ СИЛИ

**Вступ.** Тонкостінні трубчасті вали є одним з основних конструктивних елементів сучасного авіа- і енергомашинобудування. Під час роботи швидкість їх кутового обертання може досягати 30000 об/хв. Відцентрові сили інерції, що виникають при такому обертанні, призводять не тільки до появи інтенсивних полів напружень в цих валах, але можуть бути також і причиною їх біфуркаційного квазістатичного випинання. Проблемам дослідження стійкості валів, що обертаються, при різних схемах обпирання присвячена велика кількість статей. Постановки задач їх стійкості, методика дослідження та огляд наукової літератури з цих питань можна знайти в публікаціях [1-6]. У роботах [2,3,6] розглядаються задачі біфуркаційного випинання валів з урахуванням їх стиску або розтягу осьювою силою. При цьому передбачається, що ці сили є “мертвими” (не слідкуючими) (рис.1,а), і тому у валах реалізується ейлерова втрата стійкості.

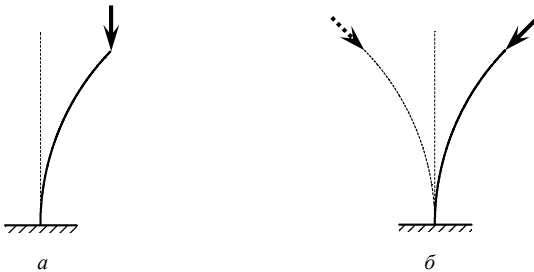


Рис.1. Схема стиску стержня “мертвою” і слідкуючою повздовжніми силами

У роботах [7-10] звернено увагу на характер дії осьових сил на стержневі системи. В них показано, що якщо сила прикладена до вільного кінця консольного стержня є слідкуючою (рис.1,б), то втрата його стійкості може бути реалізованою тільки в результаті переходу в нестійкий коливальний рух.

Задача дослідження поведінки тонкостінного вала істотно ускладнюється, якщо він обертається та піддається дії осьових

слідкуючих навантажень одночасно. У цьому випадку залежно від співвідношення сил інерції обертання та осьових навантажень можуть бути реалізовані як статична [10-15], так і динамічна форми втрати стійкості [8, 10]. Питання поведінки валів при таких видах навантаження залишаються практично невивченими. При цьому важливим є питання вибору моделі тонкостінного вала, що обертається. Залежно від діаметра, товщини та довжини вала моделювання його поведінки може здійснюватися як за допомогою теорії стержнів, так і теорії тонких оболонок.

Метою даної роботи є чисельне дослідження статичних і динамічних критичних станів тонкостінних консольних валів, що обертаються, навантажених осью слідкуючою силою. Поставлене завдання вирішується за допомогою моделей теорії стержнів, а також теорії тонких оболонок, проводиться аналіз впливу обраної моделі на значення критичних навантажень.

**Модель теорії балок.** Нехай пружний стержень, що напружений поздовжньою силою  $T$ , обертається з постійною кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$  навколо своєї осі. Сформулюємо рівняння його руху. Для цього введемо інерціальну систему координат  $OXYZ$  з початком у деякій точці стержня та систему координат  $Oxyz$  з осями  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , яка обертається разом з ним. У вихідному недеформованому стані осі  $OZ, Oz$  збігаються з поздовжньою віссю стержня. Будемо досліджувати коливання стержня в системі координат  $Oxyz$ . Прийmemo, що пружні переміщення його елементів вздовж осей  $Ox$  і  $Oy$  складають  $u$  і  $v$ , переміщеннями вздовж осі  $Oz$  знехтуємо.

Для знаходження динамічної рівноваги стержня використаємо принцип Даламбера у вигляді рівнянь згину в площинах  $xOz$  і  $yOz$

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x, \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q_y. \quad (1)$$

Тут  $M_x, M_y$  – внутрішні моменти в розглянутому перерізі балки, які діють відносно осей, що проходять через центр перерізу паралельно осям  $Ox$  і  $Oy$ ;  $q_x, q_y$  – інтенсивності сил інерції, які спрямовані паралельно відповідним осям.

Оскільки стержень попередньо напружений поздовжньою силою  $T$ , то для внутрішніх згинаючих моментів використовуються формули

$$M_x = EI \frac{d^2 v}{dz^2} - Tv, \quad M_y = EI \frac{d^2 u}{dz^2} - Tu. \quad (2)$$

Тут другі доданки в правих частинах визначають додаткові згинаючі моменти, обумовлені ексцентриситетом повздовжньої сили  $T$  при деформуванні балки.

Для обчислення складових  $q_x$  і  $q_y$  поперечного розподіленого навантаження на стержень необхідно враховувати, що його роль відіграють сили інерції, які викликані обертанням стержня та його пружними коливаннями. Тому вектор  $\vec{q}$  цього навантаження знаходиться за допомогою рівності

$$\vec{q} = -\rho F \vec{a}, \quad (3)$$

де  $\rho$  – густина матеріалу стержня,  $F$  – площа його поперечного переріза,  $\vec{a}$  – абсолютне прискорення елемента. При обчисленні вектора  $\vec{q}$  врахуємо, що механічна поведінка балки розглядається в системі координат  $Oxyz$ , яка обертається, у зв'язку з цим рух кожного елемента є складним. В цьому випадку абсолютне прискорення  $\vec{a}$  підраховується за формулою Коріоліса

$$\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c, \quad (4)$$

де  $\vec{a}^e$ ,  $\vec{a}^r$ ,  $\vec{a}^c$  - вектори переносного, відносного та коріолісового прискорень.

Вектор переносного прискорення  $\vec{a}^e$  обчислюється за формулою

$$\vec{a}^e = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (5)$$

де  $\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + z\vec{k}$  - радіус-вектор елемента стержня в системі координат  $Oxyz$ .

Виконавши відповідні векторні операції, отримуємо

$$a_x^e = -\omega^2 u, \quad a_y^e = -\omega^2 v, \quad a_z^e = 0. \quad (6)$$

Складові вектора відносного прискорення в напрямках осей системи координат  $Oxyz$  визначаються рівностями

$$a_x^r = \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad a_y^r = \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad a_z^r = 0. \quad (7)$$

Вектор коріолісового прискорення  $\vec{a}^c$  елемента стержня обчислюється за формулою

$$\vec{a}^c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}^r, \quad (8)$$

де  $\vec{V}^r$  - вектор відносної швидкості елемента із складовими

$$V_x^r = \frac{du}{dt}, \quad V_y^r = \frac{dv}{dt}, \quad V_z^r = 0. \quad (9)$$

З урахуванням рівностей (8), (9) отримуємо

$$a_x^c = -\omega \frac{dv}{dt}, \quad a_y^c = \omega \frac{du}{dt}, \quad a_z^c = 0. \quad (10)$$

Підставляючи знайдені значення компонентів прискорень (6), (7), (10) в (4) і потім в (3), отримуємо складові вектора сил інерції

$$q_x = -\rho F \left( -\omega^2 u - 2\omega \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right), \quad q_y = -\rho F \left( -\omega^2 v + 2\omega \frac{du}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2} \right). \quad (11)$$

Після переходу від звичайних похідних до частинних, на основі співвідношень (1), (2), (11) будуються рівняння коливань стержня, що обертається, та напружений поздовжньою силою  $T$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho F \omega^2 u - 2\rho F \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho F \omega^2 v + 2\rho F \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

За допомогою цієї системи можна досліджувати динамічну втрату стійкості в стержні. Відзначимо, що незважаючи на її лінійність, вона має досить складну структуру, яка обумовлена наявністю доданків виду  $-2\rho F \omega \partial v / \partial t$ ,  $+2\rho F \omega \partial u / \partial t$ . Наявність цих доданків призводить до більш складного закону зміни форми коливання та неможливості руху елементів стержня з однією загальною фазою. Ускладнення системи (12) зазначеними членами пов'язане з тим, що вони містять непарні похідні по  $t$ , а коефіцієнти перед цими доданками утворюють кососиметричні матриці.

При консольному обпиранні балки на краях  $Z = 0$  і  $Z = L$  реалізуються крайові умови

$$\begin{aligned} u(0) = v(0) = 0, \quad \left. \frac{d^2 u}{dz^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{d^2 v}{dz^2} \right|_{z=0} &= 0, \\ \left. \frac{d^2 u}{dz^2} \right|_{z=L} = \left. \frac{d^2 v}{dz^2} \right|_{z=L} &= 0, \quad \left. \frac{d^3 u}{dz^3} \right|_{z=L} = \left. \frac{d^3 v}{dz^3} \right|_{z=L} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Заміною  $u = U_s(z)\sin ct$ ,  $v = V_c(z)\cos ct$  система диференціальних рівнянь (12) з частинними похідними перетворюється в систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 U_s}{dz^4} - T \frac{d^2 U_s}{dz^2} - \rho F \omega^2 U_s + 2\rho F \omega c V_c - \rho F c^2 U_s &= 0, \\ EI \frac{d^4 V_c}{dz^4} - T \frac{d^2 V_c}{dz^2} - \rho F \omega^2 V_c + 2\rho F \omega c U_s - \rho F c^2 V_c &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

яка розв'язується методом Рунге-Кутта із застосуванням процедури ортогоналізації по Годунову.

**Модель теорії тонких оболонок.** Будемо вважати, що тонкостінна циліндрична оболонка пов'язана із жорстким носієм, який обертається разом із системою координат  $Oxyz$  з постійною за модулем кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$  відносно осі симетрії  $Oz$  (рис. 2). Введемо праві системи координат:  $OXYZ$  – інерціальна система координат з початком в центрі опорного контуру оболонки, вісь  $OZ$  збігається з віссю  $Oz$ . На серединній поверхні оболонки введемо ортогональну криволінійну систему координат  $Ox^1x^2x^3$ , в якій координатна лінія  $x^1$  лежить у твірному перерізі,  $x^2$  спрямована в колісовому напрямку,  $x^3$  – вздовж напрямку внутрішньої нормалі до поверхні оболонки.

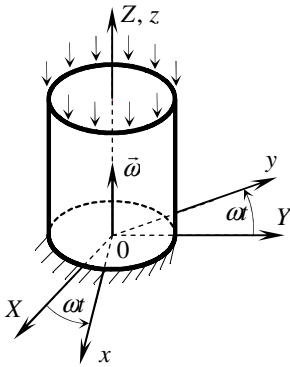


Рис.2. Схема оболонки, що обертається.

Рівняння динамічної рівноваги елемента оболонки, що записані в криволінійній ортогональній системі координат  $Ox^1x^2x^3$  з базисними векторами  $\bar{e}_\alpha$  на поверхні, мають вигляд [11-13]

$$\nabla_\alpha \bar{T}^\alpha + \bar{p} = 0, \quad \nabla_\alpha \bar{M}^\alpha + (e_\alpha \times \bar{T}^\alpha) \sqrt{a_{11}a_{22}} = 0, \quad (\alpha = 1, 2). \quad (15)$$

Тут  $\bar{T}^\alpha$  – вектор внутрішніх сил в оболонці;  $\bar{M}^\alpha$  – вектор внутрішніх моментів;  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні;  $\bar{p}$  – вектор інтенсивності зовнішнього розподіленого навантаження.

Використовуючи співвідношення зв'язку між контраваріантними компонентами функцій внутрішніх сил  $T^{ij}$  і моментів  $M^{ij}$  та коваріантними складовими функцій деформації  $\varepsilon_{ij}$  і зміни кривин  $\mu_{ij}$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= Eh\varepsilon_{\alpha\beta}(a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta})/(1-\nu^2), \\ M^{ij} &= Eh^3\mu_{\alpha\beta}(a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta})/12(1-\nu^2), \end{aligned} \quad (16)$$

виразивши ці функції через коваріантні компоненти  $u_1, u_2, u_3$  вектора переміщень  $\bar{u}$  і кути повороту  $\vartheta_i$  перерізів, отримуємо розрахункові рівняння стійкості.

В даній роботі вивчаються критичні стани простого обертання оболонки, що реалізовані за найменш енергоємною формою деформування, по першій гармоніці (за координатою  $x^2$ ). Будемо апроксимувати шукані функції першими гармоніками  $\sin(ct+x^2)$ ,  $\cos(ct+x^2)$  за фазовою координатою  $ct+x^2$ , де  $c$  - частота вільних коливань [13]. Тоді з урахуванням цього спрощення з (15), (16) можна отримати рівняння вільних коливань

$$\begin{aligned} dT^{(11)}/dx^1 - T^{(12)} + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2)T^{(11)} + \Gamma_{22}^1 T^{(22)} - b_1^1 T^{(13)} - \\ - \omega^2 \Delta \vartheta_{(1)} r/a_{11} - c^2 u_{(1)}/a_{11} = 0, \\ dT^{(12)}/dx^1 + T^{(22)} + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(12)} + T_0^{(11)} d^2 u_{(2)}/d(x^1)^2 - b_2^2 T^{(23)} - \\ - \mathcal{H}[-\omega^2 \vartheta_{(2)} r/a_{22} - 2\omega c u_{(3)}/\sqrt{a_{22}} - c^2 u_{(2)}/a_{22} - \omega^2 u_{(2)}/a_{22}] = 0, \quad (17) \\ dT^{(13)}/dx^1 - T^{(23)} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(13)} + b_{11}\Delta T^{(11)} - \mu_{(11)}T_0^{(11)} + b_{(22)}T^{(22)} - \\ - \mu_{(22)}T_0^{(22)} - \mathcal{H}[-2\omega c u_{(2)}/\sqrt{a_{22}} - \omega^2 u_{(3)} - c^2 u_{(3)}] = 0. \end{aligned}$$

Відзначимо, що вільні коливання, які описуються цією системою рівнянь, мають вигляд гармонічної хвилі, що біжить у напрямку кола з кутовою швидкістю  $c$ . Причому, якщо при  $\omega=0$ , кожна із частот є двократною і ці хвилі виявляються стоячими, то при  $\omega \neq 0$  кратні частоти розчіплюються на дві і їх моди починають прецесувати в різних напрямках. Від'ємній частоті  $c$  відповідає прецесія в напрямку обертання оболонки (пряма регулярна прецесія); додатній частоті  $c$  - прецесія у зворотному напрямку (зворотна регулярна прецесія).

**Постановка задачі Штурма-Ліувілля та методика її розв'язання.** Приведемо системи (14) і (17) до системи з восьми рівнянь першого порядку

$$\frac{d\bar{y}}{dz} = Q_1 \bar{y} + TQ_2 \bar{y} + \omega^2 Q_3 \bar{y}. \quad (18)$$

Тут  $\vec{y}(z)$  – восьмивимірна шукана вектор-функція з компонентами  $y_1 = u$ ,  $y_2 = \frac{du}{dz}$ ,  $y_3 = \frac{d^2u}{dz^2}$ ,  $y_4 = \frac{d^3u}{dz^3}$ ,  $y_5 = v$ ,  $y_6 = \frac{dv}{dz}$ ,  $y_7 = \frac{d^2v}{dz^2}$ ,  $y_8 = \frac{d^3v}{dz^3}$  для теорії балок і  $y_1 = u_{(1)}$ ,  $y_2 = u_{(2)}$ ,  $y_3 = u_{(3)}$ ,  $y_4 = \vartheta_{(1)}$ ,  $y_5 = \varepsilon_{(11)}$ ,  $y_6 = \varepsilon_{(12)}$ ,  $y_7 = \mu_{(11)}$ ,  $y_8 = T^{(13)}$  для теорії оболонок;  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  – постійні матриці коефіцієнтів розміру  $8 \times 8$ .

Вектор-функція  $\vec{y}(z)$  повинна задовольняти граничним умовам, які можна подати у вигляді

$$A_1 \vec{y}(0) = 0, \quad A_2 \vec{y}(L) = 0, \quad (19)$$

де  $A_1$ ,  $A_2$  – постійні матриці розміру  $4 \times 8$ .

Загальне рішення системи (18) при заданих  $T$ ,  $\omega$  подається у формі Коші

$$\vec{y}(z) = Y(z) \vec{C}, \quad (20)$$

де  $Y(z)$  – матриця Коші розміру  $8 \times 8$  розв'язків системи (18) з початковими умовами  $Y(0) = E$ ,  $E$  – одинична матриця;  $\vec{C}$  – шуканий постійний восьмивимірний вектор.

При застосуванні такого підходу спочатку при заданих  $T$  і  $\omega$  шляхом інтегрування системи (18) методом Рунге-Кутта будується матриця  $Y(z)$  на відрізку  $0 \leq z \leq L$ . Потім шляхом підстановки розв'язку (20) в умови (19) будується однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D \vec{C} = 0. \quad (21)$$

Стани, у яких матриця  $D$  вироджується, є критичними, оскільки в них система (18), (19) має як тривіальні, так і нетривіальні розв'язки. Для знаходження нетривіального розв'язку, що визначає форму втрати стійкості, один з компонентів вектора  $\vec{C}$  задається довільно, а сім інших обчислюються з відповідним чином усіченої системи (21). У математичній фізиці поставлене крайове завдання є задачею на власні значення або задачею Штурма-Ліувілля.

**Результати чисельного дослідження.** За допомогою розробленого підходу здійснене дослідження динамічної поведінки тонкостінних пружних валів, до вільного кінця яких прикладена осьова слідкуюча стискаюча сила (рис. 1,б). Для розрахунку вибрана трубчаста балка

довжиною  $L=1\text{ м}$ , товщиною  $h=10^{-3}\text{ м}$  і діаметром серединної поверхні  $d=0,1\text{ м}$ . Модуль пружності матеріалу труби  $E=2,1 \times 10^{11}\text{ Па}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu=0,3$ , густина  $\rho=7,8 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$ . Дослідження виконувалися за допомогою моделей теорії балок і теорії оболонки.

Відзначимо, якщо консольний стержень робить тільки обертальні рухи і не піддається дії осової сили, то зі збільшенням його кутової швидкості  $\omega$  може бути тільки квазістатична форма втрати стійкості, при якій реалізується ейлерове випинання в системі координат, що обертається. У випадку, коли на стержень діє тільки поздовжня слідкуюча стискаюча сила, можлива лише динамічна втрата стійкості, що супроводжується переходом у режим коливальних рухів. Якщо обидва види збурень консольного стержня реалізуються одночасно, то залежно від співвідношення між їх величинами, може бути реалізовано як перший, так і другий критичні стани. Щоб встановити, який з них наступає раніше, спочатку було вирішено задачу про квазістатичну поведінку стержня, стиснутого силою  $T$ , який обертається. В рівняннях (14) вважалося, що  $c=0$  і за різних значеннях  $\omega$  і  $T$  підраховувався визначник рівняння (21). Значення параметрів  $\omega$  і  $T$ , при яких детермінант матриці  $D$  перетворюється на нуль, є критичними.

Діаграми зміни величини  $\det(D)$  наведені на рис. 3. Представлені на ньому криві 1-5 відповідають наступним значенням кутової швидкості  $\omega$ : 1 – 0; 2 – 50; 3 – 500; 4 – 1000; 5 –  $\omega=2000$  рад/с. Як впливає з наведених результатів, при  $\omega \leq 500$  рад/с визначник матриці  $D$  на нуль не перетворюється, тому статична втрата стійкості системи не може бути реалізована. Однак зі збільшенням кутової швидкості до  $\omega=1000$  рад/с фактори статичного випинання стержня починають переважувати над факторами його динамічної втрати стійкості і при  $\omega=1000$  рад/с,  $T=920000\text{ Н}$  реалізується його дивергентна втрата стійкості (крива 4). Якщо  $\omega=2000$  рад/с (крива 5), то біфуркаційне випинання стержня відбувається при  $T=1660000\text{ Н}$ .

Динамічна втрата стійкості розглянутої системи при дії слідкуючих сил супроводжується їх переходом у режим коливання із зростаючою амплітудою. У цьому випадку частоти його власних коливань стають комплексними. Уявні частини цих значень відповідають частоті коливальної втрати стійкості, а дійсні частини – швидкості збільшення їх амплітуди. Тому в критичних станах частоти власних коливань перестають бути чисто уявними. В цьому випадку на графіку залежності частот від осової сили  $T$  криві першої та другої частот зливаються. Цей факт є критерієм динамічної нестійкості системи [10].

За допомогою викладеного підходу, застосовуючи моделі трубчастих балок і циліндричних оболонки, виконано аналіз динамічної поведінки

тонкостінних валів, що обертаються, при розглянутих вище значеннях кутової швидкості  $\omega$ . Розрахунки показали, що значення слідкуючої сили  $T$ , при яких настає динамічна втрата стійкості, не залежать від величини  $\omega$ . Застосування теорії оболонок дозволяє уточнити критичне значення  $T$ . Так, при застосуванні моделі теорії балок  $T_{кр}=1,65 \cdot 10^6 \text{ Н}$ , для моделі теорії оболонок  $T_{кр}=1,39 \cdot 10^6 \text{ Н}$ .

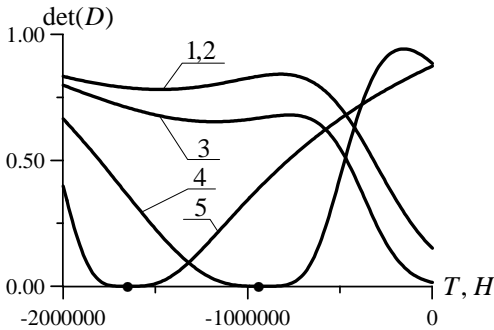


Рис. 3. Значення визначника матриці  $D$

Аналогічні дослідження були виконані для валів інших довжин  $L$ . Як показали розрахунки, із збільшенням  $L$  різниця між значеннями  $T_{кр}$ , знайденими за теорією балок і оболонок, зменшується, із зменшенням  $L$  – різниця збільшується.

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 487 с.
2. Каза К.Р., Квартерник Р.Г. К выводу нелинейных уравнений изгиба в двух плоскостях и растяжения вращающейся балки // Ракетная техника и космонавтика. – 1977. № 6. – С. 87-95
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
4. Abolghasemi M., Jalali M.A. Attractors of a rotating viscoelastic beam // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2003. – Vol. 38, No. 5. – P. 739-751.
5. Dubigeon S., Michon J.C. Modes for deformable periodic cyclic symmetric systems driven in uniform rotation by a flexible shaft // J. Sound and Vibrat. – 1986. № 106(1), – P. 53-70.
6. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с.
7. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
8. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
9. Цицлер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – С. 192.
10. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.

11. *Гуляев В.И., Гром А.А., Снежко Н.А.* Прецессионные колебания конических оболочек при сложном вращении // Изв. РАН. МТТ. – 1999. № 2. – С. 156-163.
12. *Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A.* Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies. // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 3565-3583.
13. *Соловьев И.Л.* О вращении жестких и упругих цилиндрических оболочек, упруго связанных с основанием // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 2. – С. 107-115.
14. *Sivadas K.R.* Vibration analysis of prestressed rotating thick circular conical shell // J. Sound and Vibrat. – 1995. – V. 186. №1. – P. 99–109.
15. *Соловійов І.Л.* Критичні стани тонких оболонок, пружно зв'язаних з платформою при простому і складному обертаннях // Опір матеріалів та теорія споруд. – 2004. – Вип.75. – С. 71-79.

*Надійшло до редакції 08.11.2006 р.*

УДК 539.3

Фіалко С.Ю., докт. техн. наук,  
Лумельський Д.Є.

## СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПЛОСКИХ РАМ НА СТІЙКІСТЬ

Пропонується трьохвузловий скінченний елемент високого порядку для аналізу стійкості плоских рам. Для апроксимації нормального прогину використовуються ієрархічні функції форми, причому перші чотири, що належать до першого рівня ієрархії, є загальновідомими поліномами Ерміта, а в другому рівні ієрархії застосовуються специфічні поліноми четвертого та п'ятого ступеня. Приведено чисельні результати, що ілюструють швидку збіжність.

**Вступ.** При аналізі стійкості стержневих систем методом скінченних елементів класичні функції форми – поліноми Ерміта – не дозволяють одержати точне розв'язання задачі, оскільки точний вираз для нормального прогину стержня під дією осьових сил описується комбінацією поліномів і трансцендентних функцій. Якщо вирішувати цю задачу точно, то необхідно відмовитися від класичної апроксимації нормальних прогинів, використовуючи відповідні трансцендентні вирази для функцій форми [1]. Такий підхід дозволяє одержати точне значення критичної сили, однак у рамках методу скінченних елементів (МСЕ) приводить до задачі на власні значення виду

$$\mathbf{A}(\lambda) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

де  $\lambda$  - параметр навантаження,  $\mathbf{u}$  – вектор вузлових переміщень. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$\det(\mathbf{A}(\lambda)) = 0,$$

в якому коефіцієнти матриці  $\mathbf{A}$  є трансцендентними функціями від параметра навантаження  $\lambda$ . Недоліком цього підходу є відсутність ефективних методів рішення таких задач. Як правило, задається послідовність зростаючих значень параметра  $\lambda$  і, використовуючи **LDL** розкладання матриці  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{L}^T(\lambda),$$

визначається знак визначника  $\det(\mathbf{A}(\lambda)) = \prod_{i=1}^N \mathbf{D}_i$ , де  $N$  – розмірність задачі. Інтервал, укладений між двома суміжними значеннями параметра  $\lambda$ , на границях якого визначник змінює знак, містить критичне значення параметра  $\lambda_{cr}$ . Дроблячи цей інтервал, можна уточнювати значення  $\lambda_{cr}$ . Проблема такого підходу очевидна. По-перше, при щільному спектрі власних чисел задачі (1) стає важко, а іноді неможливо локалізувати мінімальне власне число. По-друге, форма втрати стійкості, що відповідає пошукованому власному числу, часто визначається з значною похибкою і буває недостовірною. По-третє, для великих розрахункових моделей такий алгоритм дуже витратний, оскільки вимагає багаторазового перерозкладення матриці  $\mathbf{A}$ .

Якщо використовувати класичну інтерполяцію функції нормального прогину (поліноми Ерміта), то розв'язання виходить наближеним, причому в ряді випадків значення критичного навантаження істотно завищено. Зате параметр навантаження в коефіцієнті матриці входить лінійно, і задача зводиться до алгебраїчної узагальненої проблеми власних значень

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{G}\mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

де  $\mathbf{K}, \mathbf{G}$  – матриці жорсткості і геометричної жорсткості. Методи розв'язування задачі (2) добре відпрацьовані [5], високо ефективні і дозволяють з високим ступенем достовірності визначати як власні числа, так і власні вектори навіть для задач високої розмірності, що мають близькі або строго кратні власні числа.

Для зменшення похибки, зв'язаної з наближеним представленням нормальних прогинів у межах кожного скінченного елемента, варто дробити стержні на окремі скінченні елементи (СЕ), оскільки поліноми Ерміта не можуть точно описати функцію нормального прогину при втраті стійкості. Багаторічний досвід одного з авторів, заснований на підтримці програмних комплексів SCAD та Robot Millennium [4, 6], свідчить про те, що інженер-будівельник практично ніколи не поділяє стержні рам на кілька СЕ. Крім суб'єктивних причин, зв'язаних з нерозумінням вище згаданого факту, існує ще й об'єктивна причина. Справа в тим, що дроблення стержнів рам на окремі СЕ означає, що для розв'язування задачі стійкості необхідно створити іншу розрахункову модель, що відрізняється від тієї, котра використовувалась для статичного аналізу. Але це – додаткова робота, що вимагає витрат часу.

У даній роботі пропонується стержневий тривузловий скінченний елемент, що дозволяє істотно наблизити значення критичної сили до точного розв'язку задачі за рахунок підвищення порядку апроксимуючих функцій. Це дозволяє без дроблення стержнів рам на СЕ одержувати прийнятний для практичного аналізу результат, приводячи задачу стійкості до виду (2), що допускає використання будь-яких високоєфективних методів розв'язування алгебраїчної часткової узагальненої проблеми власних значень. Пропонований СЕ легко узагальнюється на випадок просторової задачі і може бути використаний для аналізу стійкості як стержневих систем, так і комбінованих.

**Тривузловий скінченний елемент.** Використовується ієрархічна інтерполяція переміщень [3] СЕ в локальній системі координат

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= U_i \varphi_1(\xi) + U_j \varphi_4(\xi) + \Delta U_k \varphi_1(\xi); \\
 &\quad \text{основне поле переміщень} \quad \text{коригувальне} \\
 w(\xi) &= W_i \varphi_2(\xi) + \Theta_i \varphi_3(\xi) + W_j \varphi_5(\xi) + \Theta_j \varphi_6(\xi) + \\
 &\quad \text{основне поле переміщень} \\
 &\quad + \Delta W_k \varphi_8(\xi) + \Delta \Theta_k \varphi_9(\xi), \\
 &\quad \text{коригувальне}
 \end{aligned}$$

де  $U_i, W_i, \Theta_i, U_j, W_j, \Theta_j$  – значення переміщень і кутів повороту у вузлах  $i, j$  відповідно,  $\Delta U_k, \Delta W_k, \Delta \Theta_k$  – значення збільшення переміщень і кутів повороту у середньому вузлі  $k$  (рис. 1),  $\varphi_1(\xi) - \varphi_6(\xi)$  – класичні функції форми (поліноми Ерміта), що є базисом основного поля переміщень, (перша ступінь ієрархічного базису), а  $\varphi_7(\xi) - \varphi_9(\xi)$  – функції форми (рис. 2, 3), що є базисом коригувального поля переміщень (друга ступінь ієрархічного базису),  $\xi = \frac{x}{a}$ ,  $x$  – координата уздовж осі стержня. При такому представленні інтерполяція основного поля переміщень у точності збігається з відповідною інтерполяцією двовузлового класичного скінченного елемента, а коригувальне поле переміщень відіграє роль добавки, що уточнює основне поле переміщень. Наведена інтерполяція задовольняє вимозі твердих зсувів, тобто якщо СЕ перемістити в просторі як абсолютно тверде тіло, то деформації і зусилля дорівнюють нулеві.

Функції форми приведені нижче.

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= 1 - \xi; \quad \varphi_2(\xi) = 1 - 3 \cdot (\xi)^2 + 2 \cdot (\xi)^3; \\ \varphi_3(\xi) &= a \cdot (-\xi + 2 \cdot (\xi)^2 - (\xi)^3); \quad \varphi_4(\xi) = \xi; \quad \varphi_5(\xi) = 3 \cdot (\xi)^2 - 2 \cdot (\xi)^3; \\ \varphi_6(\xi) &= a \cdot ((\xi)^2 - (\xi)^3); \quad \varphi_7(\xi) = 4 \cdot \xi \cdot (1 - \xi); \\ \varphi_8(\xi) &= 16(\xi - 0.5)^4 - 8(\xi - 0.5)^2 + 1; \\ \varphi_9(\xi) &= 16 \cdot a \cdot (\xi - 0.5)^5 - 8 \cdot a \cdot (\xi - 0.5)^3 + a \cdot (\xi - 0.5). \end{aligned}$$

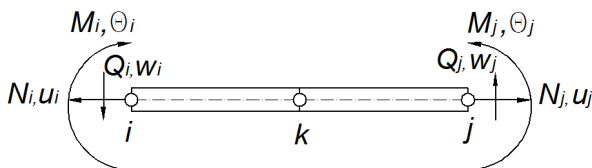


Рис. 1. Тривузловий скінченний елемент

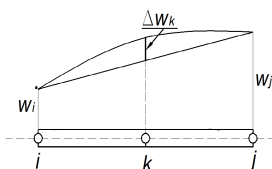


Рис. 2. Вузлові переміщення в крайніх та середнім вузлах

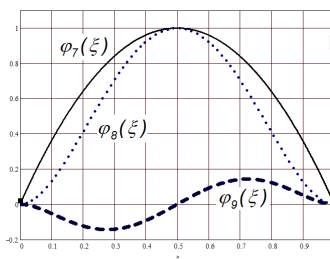


Рис. 3. Функції форми коригуючого поля переміщень

Для одержання матриць жорсткості та геометричної жорсткості скінченного елемента в локальній системі координат застосуємо принцип можливих переміщень

$$\delta E = \delta(\Pi + W) = \int_0^a (M \delta \kappa + N \delta \varepsilon) dx - N \delta \Delta = 0,$$

де останній доданок являє собою роботу подовжних сил при переході з докритичного рівноважного стану в суміжний при втраті стійкості,  $a$  – довжина СЕ,  $\Pi$  – потенційна енергія пружної деформації,  $W$  – зміна потенціалу зовнішніх сил,  $M$  – згинальний момент,  $N$  – подовжня сила,  $\kappa$

– зміна кривизни осі стержня,  $\varepsilon$  – деформація уздовж осі стержня,  $\Delta$  – зближення торців при втраті стійкості. Відомо [2], що

$$\Delta = \frac{I}{2} \int_0^a \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

В результаті одержуємо матрицю жорсткості  $K_e$ :

	$i$		$\vdots$	$j$		$\vdots$	$k$	
	$\frac{EA}{a}$	0	0	$-\frac{EA}{a}$	0	0	0	0
$i$	0	$\frac{12EI}{a^3}$	$-\frac{6EI}{a^2}$	0	$-\frac{12EI}{a^3}$	$-\frac{6EI}{a^2}$	0	0
	0	$-\frac{6EI}{a^2}$	$\frac{4EI}{a}$	0	$\frac{6EI}{a^2}$	$\frac{2EI}{a}$	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
	$-\frac{EA}{a}$	0	0	$\frac{EA}{a}$	0	0	0	0
$j$	0	$-\frac{12EI}{a^3}$	$\frac{6EI}{a^2}$	0	$\frac{12EI}{a^3}$	$\frac{6EI}{a^2}$	0	0
	0	$-\frac{6EI}{a^2}$	$\frac{2EI}{a}$	0	$\frac{6EI}{a^2}$	$\frac{4EI}{a}$	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
	0	0	0	0	0	0	$\frac{16EA}{3a}$	0
$k$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{204,8EI}{a^3}$
	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{36,5714EI}{a}$

і матрицю геометричної жорсткості  $G_e$ :

	$i$		$\vdots$	$j$		$\vdots$	$k$	
	0	0	0	0	0	0	0	0
$i$	0	$\frac{6N}{5a}$	$-\frac{N}{10}$	0	$-\frac{6N}{5a}$	$-\frac{N}{10}$	0	$-0,22857N$
	0	$-\frac{N}{10}$	$\frac{2Na}{15}$	0	$\frac{N}{10}$	$-\frac{Na}{30}$	0	$-0,53333N$ $0,11429Na$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
	0	0	0	0	0	0	0	0
$j$	0	$-\frac{6N}{5a}$	$\frac{N}{10}$	0	$\frac{6N}{5a}$	$\frac{N}{10}$	0	$0,22857N$
	0	$-\frac{N}{10}$	$-\frac{Na}{30}$	0	$\frac{N}{10}$	$\frac{2Na}{15}$	0	$0,53333N$ $0,11429Na$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
	0	0	0	0	0	0	0	0
$k$	0	0	$-0,53333N$	0	0	$0,53333N$	0	$\frac{4,87619N}{a}$
	0	$-0,22857N$	$0,11429Na$	0	$0,22857N$	$0,11429Na$	0	$0,40635Na$

Кожна з матриць представлена у виді блоків, коефіцієнти яких відносяться до відповідних вузлів  $i, j, k$ . Внаслідок ієрархічності функцій

форми кожна з підматриць, зв'язаних з вузлами  $i, j$ , співпадає з відповідними підматрицями двовузлового класичного СЕ.

Дослідження виконані на основі комп'ютерної системи SOLVER, для визначення значень критичних сил і форм втрати стійкості використовувався метод спряжених градієнтів з передобумовленням [5].

Для оцінки точності і збіжності запропонованого скінченного елемента було розв'язано кілька задач. Перш за все розглянемо стержень одиничної довжини, стиснутий одиничною силою, при різних граничних умовах.:

$$\begin{cases} w(0) = \theta(0) = u(0) = 0 \\ N(a) = P, M(a) = Q(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{ГУ1}) \quad (8)$$

$$\begin{cases} w(0) = \theta(0) = u(0) = 0 \\ N(a) = P, w(a) = M(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{ГУ2}) \quad (9)$$


$$\begin{cases} w(0) = \theta(0) = u(0) = 0 \\ N(a) = P, w(a) = \theta(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{ГУ3}) \quad (10)$$

**Чисельні результати.** Відповідні результати приведені в таблицях 1 – 3, причому для всіх розглянутих скінченних елементів використовується поліноміальна інтерполяція, що дозволяє звести задачу до форми (2).

Найбільш несприятливими є умови закріплення ГУ3 (табл. 3). При відсутності дроблення (весь стержень моделюється одним скінченим елементом) похибка для тривузлового СЕ складає порядку 6%. Класичний двовузловий СЕ в цьому випадку взагалі не дає розв'язання, оскільки бракує ступенів свободи:  $W_i = \theta_i = W_j = \theta_j = 0 \rightarrow w(\xi) = 0$ . При розподілі стержня на два СЕ похибка тривузлового СЕ складає менш 0.01%. Для інших типів закріплення при відсутності дроблення стержня на СЕ похибка для тривузлового СЕ не перевищує 0.1% (табл. 1, 2).


Таблиця 1

Порівняння збіжності критичної сили для 2-вузлового і 3-вузлового СЕ, ГУ1

	Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
	1	4971.9	0.8%	4934.8	0.001%	
	2	4937.3	0.05%	4934.8	$3.8 \times 10^{-6}\%$	
	4	4934.9	0.004%	4934.8	$3.8 \times 10^{-6}\%$	


Таблиця 2

Порівняння збіжності критичної сили для 2-вузлового і 3-вузлового СЕ, ГУ2

	Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
	1	24000	21.6%	19750.2	0.056%	
	2	19887.7	0.8%	19739.2	$1.52 \times 10^{-4} \%$	
	4	19749.3	0.05%	19739.2	$5,1 \times 10^{-5} \%$	

Таблиця 3

Порівняння збіжності критичної сили для 2-вузлового і 3-вузлового СЕ, ГУ3

	Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
	1	–	–	84000	6.39%	
	2	80000	1.38%	78958.0	0.0025%	
	4	79550.0	0.8%	78957.0	0.0012%	

На рис. 4 показана форма втрати стійкості типової багатоповерхової рами. Для кожної зі стиснутих стійок реалізується загальна форма втрати стійкості, що охоплює всі стержні рами. Для такої системи результати, одержані на основі класичного двовузлового СЕ, є цілком прийнятними (табл. 4).

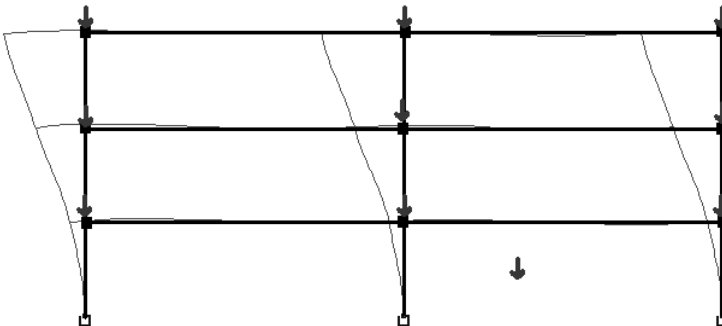


Рис. 4. Загальна форма втрати стійкості багатоповерхової плоскої рами

На рис. 5, 6 наведені приклади, у яких форма втрати стійкості носить локальний характер, тобто охоплює незначну кількість стержнів. З таблиць 5, 6 видно, що при відсутності дроблення стержнів рами на СЕ стандартний двовузловий СЕ дає завищене значення критичного навантаження на 69% – 73% в порівнянні з точним розв'язанням, а запропонований тривузловий СЕ – на 1%. При розподілі стержнів на два СЕ похибка для двовузлового СЕ складає порядку 3%, а тривузлового – не перебільшує 0.2%.

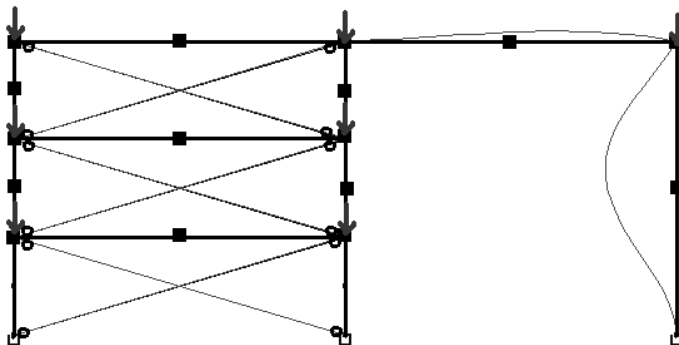


Рис. 5. Локальна форма втрати стійкості плоскої рами

Таблиця 4

Порівняння збіжності чисельних результатів при збільшенні поділень стержня на скінченні елементи для рами, що представлена на рис. 4

Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
1	45291.5	1.0%	44907.1	0.15%	44838.2
2	45063.7	0.5%	44906.7	0.15%	
4	44917.7	0.18%	44906.7	0.15%	

Таблиця 5

Порівняння збіжності чисельних результатів при збільшенні поділень стержня на скінченні елементи для рами, що представлена на рис. 5

Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
1	79167.7	73.6%	46060.4	1%	45610.2
2	46919	2.9%	45638.5	0.06%	
4	45751	0.31%	–	–	

Таблиця 6

Порівняння збіжності чисельних результатів при збільшенні поділень стержня на скінченні елементи для рами, що представлена на рис. 6

Кількість розподілів на СЕ	2-вузл. СЕ	Похибка %	3-вузл. СЕ	Похибка %	Точне значення
1	7537.1	69.5%	4493.3	1.1%	
2	4562.4	2.6%	4454.7	0.2%	
4	4465.3	0.4%	4454.5	0.2%	4446.4

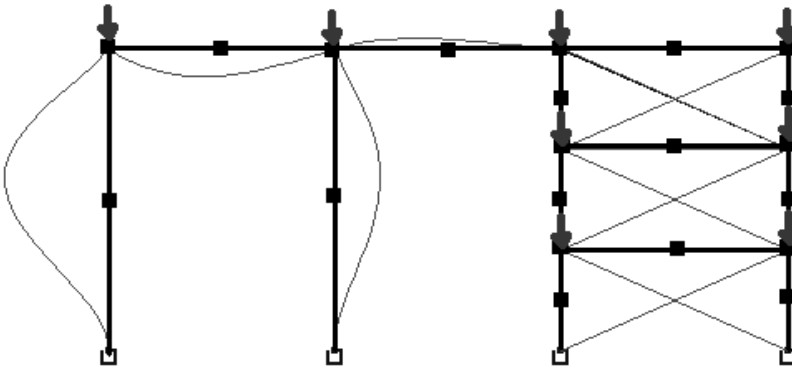


Рис. 6. Локальна форма втрати стійкості плоскої рами

**Висновки.** Для рам, що втрачають стійкість за локальною формою, стандартний двовузловий СЕ (функції форми – поліноми Ерміта) завищує значення критичної сили до 70%, що є неприйнятним. При цьому потрібно або відмовитися від поліноміальної інтерполяції при побудові функцій форми, перейшовши до неефективного алгоритму розв'язування задачі, або, залишаючись у рамках інтерполяції поліномами Ерміта, виконати розподіл стержнів рами на скінченні елементи.

Запропонований тривузловий скінченний елемент при визначенні критичного навантаження в таких задачах приводить до похибки, що не перевищує 1% без будь-якого розподілу стержнів рам, що є цілком прийнятним для практики. Оскільки поліноміальний характер інтерполяції зберігається, задача зводиться до алгебраїчної узагальненої часткової проблеми власних значень, для рішення якої розроблені ефективні алгоритми.

1. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / *А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лацеников, Н.Н. Шапошников*. – М.: Стройиздат, 1984. – 414 с.
2. Устойчивость деформируемых систем. / *А.С. Вольмир*, Изд.2, перераб. и доп. – М.: 1967. – 984 с.
3. The finite element method / *O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor*. — N.Y.: McGraw-Hill—2000, vol. 1—688 p.
4. SCAD для пользователей / *В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер, А.Т. Трофимчук* — К.: Изд-во Компас, 2000.— 332 с.
5. *Фиалко С.Ю.* О решении обобщенной проблемы собственных значений. — В кн. Перельмутер А.В., Сливкер В.И., Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. — Издание второе. – К.: Сталь — 2002, — С. 570—597.
6. Robot Millennium. User's Guide (<http://robot-structures.com/us/>).

*Надійшла до редколегії 24.11.2006 р.*

## ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П.</i> Алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язкопружно-пластичності призматичних тіл з урахуванням пошкодженості . . . . .	3
<i>Гуляєв В.І., Белова М.О., Горбунович І.В.</i> До розрахунку стійкості та коливань бурильної колони . . . . .	18
<i>Шульга М.О.</i> До лінеаризованої теорії магеїостриктиї феритів з дисипативним феромагнітним резонансом . . . . .	26
<i>Гоцуляк Є.О., Пасічник Р.В.</i> Стійкість чотирирохпелюсткового гітара . . . . .	33
<i>Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.</i> Стійкість конічних оболонок лінійно-змінної товщини . . . . .	46
<i>Гайдайчук В.В., Худолій С.М., Гловач Л.В.</i> Теоретична ідентифікація сил опору, що діють на криволінійні бурильні колони . . . . .	52
<i>Вабішевич М.О., Сахаров О.С., Солодей І.І.</i> Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень призматичних тіл з тріщинами при дії динамічного навантаження . . . . .	61
<i>Іванченко Г.М., Голуб О.О.</i> Взаємозв'язок кінематичних параметрів смерчу та тиску на горизонтальну поверхню . . . . .	77
<i>Кобієв В.Г.</i> Особливості деформування та визначення специфіки впливу зовнішніх факторів на оболонкові системи при імпульсних діях великої потужності . . . . .	82
<i>Станкевич А.М., Шкельов Л.Т.</i> Визначення напружено-деформованого стану пружного просторового тіла, яке має форму паралелепіпеда . . . . .	90

*Соловйов І.Л.*

Динамічна втрата стійкості тонкостінних валів, що обертаються, під дією стиску осьової слідкуючої сили . . . . . 102

*Фіалко С.Ю., Лумельський Д.Є.*

Скінченний елемент високого порядку для розрахунку плоских рам на стійкість . . . . . 112

Наукове видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

Науково-технічний збірник

Випуск 78

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 18.12.06. Формат 60x84 1/16. Папір друк №1.

Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.

Тираж 100. Зам. № 7-609.

---

**КНУБА**

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03037.

---

Віддруковано на ЗАТ “ВІПОЛ”

03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру

Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.